Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 2
20. April 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 27. April 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

In der Vorlesung Diskrete Strukturen wird der Begriff des n-Tupels von Elementen eingeführt. Für eine beliebige Menge A wird gleichzeitig A^n als Bezeichnung für die Menge aller n-Tupel von Elementen aus A zusammen mit gleichbedeutenden Bezeichnungen

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n-\text{fach}} \quad \text{oder} \quad A^{\times n}\,.$$

definiert. Mengentheoretisch gilt dabei stets $A^{n+1} \neq A^n \times A \neq A \times A^n$.

1. Sei Σ eine nichtleere Menge. Dann ist $(\Sigma^{\times 2}, \times_2)$ eine Algebra mit der 2-Tupelbildung $x \times_2 y := (x, y)$ als Operation. Zeigen Sie, dass die Operation $\times_2$ nicht assoziativ ist.

2. Sei Σ eine nichtleere endliche Menge. Dann ist die Konkatenation $\circ$ von Wörtern aus Σ^* eine assoziative Operation. Im Kontext der assoziativen Algebra $(\Sigma^*, \circ)$ wird das Produkt AB von Teilmengen $A, B \subseteq \Sigma^*$ definiert und die Potenzierung induktiv durch $A^{n+1} = AA^n$ eingeführt (siehe Vorlesung). Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung für alle $A \subseteq \Sigma^*$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

   $$A^{m+n} = A^m A^n\,.$$

   Zu beachten: Für eine beliebige Menge A ist i.A. keine Konkatenation definiert, wohl aber eine n-Tupelbildung.

3. Sei $R \subseteq [100] \times [100]$ eine binäre Relation über der Menge $[100] = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ von natürlichen Zahlen mit $R = \{(x, y) \in [100] \times [100]\,;\, 3x = y\}$. Die Potenzierung R^n ist bekanntlich bezüglich der assoziativen Komposition $\circ$ von Relationen definiert.

   Berechnen Sie R^3 und $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$ als endliche Listen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet. Zeigen Sie für alle formalen Sprachen A über Σ die folgenden Aussagen.

1. $A^* = A^+ \Leftrightarrow \epsilon \in A$. (Beachten Sie: $A^+ = AA^*$.)
2. $AA \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A = A^+$.

3. Zeigen Sie für alle $A \neq \emptyset$: $\quad A \subseteq AA \Leftrightarrow \epsilon \in A$.

Bemerkung: In algebraischer Sprechweise heißt A *abgeschlossen* bezüglich der Konkatenation $\circ$, falls $AA \subseteq A$ gilt, und A ist in diesem Fall eine Unterhalbgruppe von $(\Sigma^*, \circ)$. Entsprechend ist A^+ die *von A erzeugte Halbgruppe* (oder Unterhalbgruppe). Falls $AA \subseteq A$ und $\epsilon \in A$ gelten, heißt A ein *Untermonoid* von $(\Sigma^*, \circ)$. A^* ist das *von A erzeugte Monoid* (oder Untermonoid).

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie: Seien $u, v \in \Sigma^*$ Wörter mit $u \neq \epsilon$, $v \neq \epsilon$ und $uv = vu$. Dann existiert ein $z \in \Sigma^*$ mit $u = z^m$ und $v = z^n$ für gewisse $m, n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Notation w_i, um den i-ten Buchstaben eines Wortes w zu bezeichnen. Dabei bezeichnet w_1 den ersten Buchstaben.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{(,)\}$ der Zeichenvorrat mit einer öffnenden und einer schließenden Klammer. Für $w \in \Sigma^*$ definieren wir $|w|_($ bzw. $|w|_)$ als die Anzahl der in w enthaltenen öffnenden bzw. schließenden Klammern. u ist ein Anfangsteilwort (Praefix) von w, falls es ein Wort v gibt, so dass $w = uv$ gilt. Wir nennen ein nichtleeres Wort $w \in \Sigma^*$ positiv, falls $|u|_(> |u|_)$ für alle nichtleeren Anfangsteilwörter u von w gilt.

Bestimmen Sie die Anzahl der positiven Wörter über Σ der Länge $n \in \mathbb{N}$!

Hinweis: Benutzen Sie die Formel zur Lösung des Ballot-Problems aus der Vorlesung Diskrete Strukturen (WS 12/13) wie folgt.
Ballot-Problem: Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen und Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt. Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?
Lösung: Die gesuchte Anzahl ist $\frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}$, oder a.a., $\frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{b}$.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Eine Grammatik G sei gegeben in BNF-Form durch

$$S \to a\, S\, d\, d, \qquad\qquad S \to \{b\} \mid \{c\}.$$

Geben Sie G als kontextfreie Grammatik $G = (V, \{a, b, c, d\}, P, S)$ an.

Vorbereitung 2

Gegeben sind folgende Grammatiken:

$$G_1 := (\{S\},\ \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{+}, \texttt{(}, \texttt{)}\},\ \{S \to \texttt{a},\ S \to \texttt{b},\ S \to S\texttt{+}S,\ S \to \texttt{(}S\texttt{)}\},\ S),$$
$$G_2 := (\{S\},\ \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{+}, \texttt{(}, \texttt{)}\},\ \{S \to \texttt{a},\ S \to \texttt{b},\ S \to \texttt{a+}S,\ S \to \texttt{b+}S,\ S \to \texttt{(}S\texttt{)}\},\ S).$$

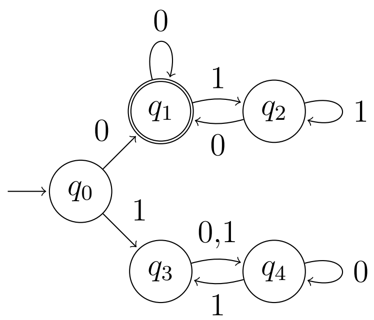
1. Ordnen Sie die Grammatiken in die Chomsky-Hierarchie ein.

2. Geben Sie jeweils einen Ableitungsbaum für das Wort `a+(b+a)` an.

3. Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

Vorbereitung 3

Wir betrachten einen endlichen deterministischen Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der durch die folgende Grafik gegeben ist.



1. Übersetzen Sie die Grafik in eine extensionale Mengenschreibweise (Darstellung durch Auflistung) für Q, Σ, δ und F.

2. Bestimmen Sie $\delta(\delta(q_1, 0), 1)$ und $\hat{\delta}(q_0, 10)$!

3. Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium an, mit dem man entscheiden kann, ob ein Wort $w \in \Sigma^*$ von A akzeptiert wird.

Vorbereitung 4

Geben Sie jeweils einen endlichen Automat (als Graph und Übergangsrelation) an, der über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ folgende Sprache akzeptiert:

1. Die Menge aller Wörter, die das Teilwort 1110 enthalten.

2. Die Menge aller Wörter, bei denen die Anzahl der Einsen durch 3 teilbar ist.

3. Die Menge aller Wörter, die mit 10 beginnen und auf 01 enden.

Tutoraufgabe 1

Wir beziehen uns auf die in der Vorbereitungsaufgabe 2 definierten Grammatiken G_1 und G_2.

1. Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in L(G_1)$ ist auch $(w_1\texttt{+}w_2) \in L(G_1)$.

   Gilt diese Aussage auch für G_2?

2. Sind die Grammatiken G_1 bzw. G_2 eindeutig?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten die Sprache L aller Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die entweder mit 1 beginnen und gleichzeitig mit 1 enden oder die mit 0 beginnen und gleichzeitig mit 0 enden.

1. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert, und zeigen Sie, dass es unendlich viele DFA gibt, die L akzeptieren.

2. Geben Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit höchstens 4 Zuständen an, der L akzeptiert.

Tutoraufgabe 3

Sei $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ die Zeichenmenge der Ziffern von 0 bis 3. Sei Q die Sprache der Zahldarstellungen zur Basis 4 ohne führende Nullen. $\#(x)$ sei die der Darstellung x zugeordnete ganze Zahl. (Beispiel: $0 \in Q$, $2013 \in Q$, $02013 \notin Q$. Es gilt $\#(2013_4) = 4 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 4^1 + 3 \cdot 4^0 = \#(135_{10})$.)

Sei $L = \{w \in Q\,;\ \#(w) \bmod 3 = 2\}$.

1. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten A, der L akzeptiert.

2. Beweisen Sie, dass A die Sprache L akzeptiert, d. h., dass $L(A) = L$ gilt.