SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/

9. Juli 2014

ZÜ IX

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen, Probleme, Klausur
2. Thema	Wiederholung: Markov-Ketten, Erwartete Übergangszeit, Erwartete Rückkehrzeit, Ankunftswahrscheinlichkeit, Rückkehrwahrscheinlichkeit, Beispiele 1 und 2
3. Aufgaben	Blatt 11 und 12

1. Übungsbetrieb

1.1 Fragen, Probleme

Aktuelle Fragen, Anregungen?

Achtung:

HA 2, Blatt 12 wurde korrigiert!
Laufindex in der Minimierung bzw. Maximierung von 0 an!

1.2 Klausur

Fragen zum Stoff der Endterm?

Klausurergebnisse

Klausureinsicht

1.3 Termin und Ort

Zeit: Dienstag, 29. Juli, 11 – 13 Uhr

Ort: Hörsäle MW 2001 (+Galerie), MI HS2, Interim HS1, Physik HS1, Physik HS2.

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 25. Juli.

Die Verteilung auf Sitzplätze wird den Listen zu entnehmen sein, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

1.4 Anmeldung

Eine Anmeldung für die Endterm
erfolgte über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

Achtung:

Bei Nichtanmeldung kann nicht garantiert werden, dass Sitzplatz und Klausurunterlagen zur Verfügung stehen!

Alle Teilnehmer der Klausuren müssen sich bei der Ausweiskontrolle im Hörsaal ausweisen können!!

1.5 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,
außer
einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt,
aber
Antworten werden, falls notwendig,
nur als Hörsaalansage gegeben.

1.6 Code

Code:								

Bitte 8-stelligen Zifferncode (nicht ausschließlich die Null) eintragen,
falls Sie Ihr Ergebnis frühzeitig erfahren wollen.

2. Thema: Wiederholung Markov-Ketten

2.1 Markov-Ketten

Man beachte, dass Markov-Ketten in der Regel durch Übergangsdiagramme definiert werden.

In den Diagrammen werden nur positive Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen.

Alle übrigen Übergänge haben die Wahrscheinlichkeit 0.

Zentrale Begriffe:

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit diskreter Zeit, d. h. eine Folge von Zufallsvariablen, die der Markov-Bedingung genügt.
Der Zustandsraum sei S. Falls $|S| < \infty$, dann heißt die Markov-Kette endlich.

Man beachte, dass die Ergebnisse, die von einer Markov-Kette angenommen werden können, unendliche Zustandsfolgen $(s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots) \in S^{\mathbb{N}_0} = \Omega$ sind.

Die diskreten Zufallsvariablen $T_{i,j}$ bzw. T_i für $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 0\,;\, X_n = j,\ \text{wenn } X_0 = i\}\,,$$

$$T_i = \min\{n \geq 1\,;\, X_n = i,\ \text{wenn } X_0 = i\}\,,$$

heißen Übergangszeit bzw. Rückkehrzeit.

Man beachte:

$T_{i,j}$ und T_i sind bedingte Zufallsvariable, die für Markovketten mit $X_0 \neq i$ undefiniert bleiben können, weil die Gesamtheit dieser Markov-Ketten mit $X_0 \neq i$ in dem durch $X_0 = i$ bedingten Wahrscheinlichkeitsraum ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 darstellt.

Wir entfernen aus Ω alle Ergebnisfolgen mit $X_0 \neq i$ und definieren den bedingten Ergebnisraum $\Omega_{(X_0=i)} = \Omega \setminus \{(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}\,;\, X_0 \neq i\}$.

Dann gelten

$T_{i,j} : \Omega_{(X_0=i)} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ und $T_i : \Omega_{(X_0=i)} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Die Dichtefunktionen $f_{T_{i,j}}$ und f_{T_i} haben also den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Im Allgemeinen gilt $f_{T_{i,j}}(+\infty) \neq 0$ und $f_{T_i}(+\infty) \neq 0$.

Speziell gilt für alle $x \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

$$f_{T_{i,i}}(x) = \begin{cases} 1 : x = 0\,, \\ 0 : \text{sonst}\,. \end{cases}$$

2.2 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit

Auf die Zufallsvariablen $T_{i,j}$ und T_i stützen sich die Begriffe

Ankunftswahrscheinlichkeit bzw. Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$f_{i,j} \quad \text{bzw.} \quad f_i\,.$$

Es gelten $f_{i,j} = \Pr[T_{i,j} < +\infty]$ und $f_i = \Pr[T_i < +\infty]$.

Die folgenden Eigenschaften einer Markov-Kette hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.

Man beachte, dass in das Übergangsdiagramm nur Pfeile mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen werden dürfen.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ccc} f_i = 0, & 0 < f_i < 1, & f_i = 1, \\ f_{i,j} = 0, & 0 < f_{i,j} < 1, & f_{i,j} = 1\,. \end{array}$$

$f_{i,j} = 0$ bzw. $f_i = 0$:

Es gibt keinen Pfad vom Knoten i nach Knoten j
bzw. von i zurück auf sich selbst.

$f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 1$:

Jeder bei i beginnende Pfad kann
zu einem Pfad bis zu j bzw. zu i zurück
verlängert werden.

$0 < f_{i,j} < 1$ bzw. $0 < f_i < 1$:

Die vorausgegangenen Eigenschaften treffen nicht zu.

Abgeleitete Eigenschaften für Zustände $i \in S$:

i ist transient, falls $f_i < 1$.

i ist rekurrent, falls $f_i = 1$.

i ist absorbierend, falls $f_{i,j} = 0$ für alle $j \neq i$ gilt.

Bemerkung:

Auch die Eigenschaft „irreduzibel" hängt ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.

Berechnung der Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeiten:

Bei gegebener zeithomogener diskreter Markov-Kette (Übergangsmatrix) können alle $f_{i,j}$ und f_i durch folgendes Verfahren gefunden werden:

1. Man bestimme, für welche i, j die Gleichungen $f_{i,j} = 0$, $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 0$, $f_i = 1$ gelten.

2. Man löse für die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ f_i &= p_{i,i} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} f_{k,i}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir können die Gleichungen „zeilenweise“ lösen.

2.3 Erwartungswerte von $T_{i,j}$ und T_i

Erwartete Übergangszeit: $h_{i,j} := \mathbb{E}[T_{i,j}]$.

Erwartete Rückkehrzeit: $h_i := \mathbb{E}[T_i]$.

Es gilt:

Falls $|S| < \infty$, dann existieren die Erwartungswerte $h_{i,j}$ bzw. h_i genau dann, wenn $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 1$ gilt.
Die Berechnung erfolgt nach Vorlesung mit Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} h_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ h_i &= 1 + \sum_{k \neq i} p_{i,k} h_{k,i}\,. \end{aligned}$$

2.4 Beispiel 1: ZA 7

Anton (A) und Bodo (B) spielen das folgende Spiel mit einem fairen Würfel.

Wenn A an der Reihe ist, würfelt er so lange, bis er entweder eine ungerade Zahl würfelt (dann ist B an der Reihe) oder drei Mal hintereinander eine gerade Zahl geworfen hat (dann ist das Spiel zu Ende und A hat gewonnen).

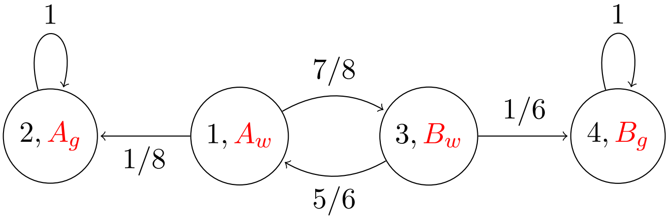
Ist B an der Reihe, so würfelt er einmal. Zeigt der Würfel eine Sechs, so ist das Spiel zu Ende und B hat gewonnen.
Ansonsten ist A wieder an der Reihe.

A beginnt.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der A gewinnt.
2. Wie lange dauert das Spiel im Mittel?

Das Spiel läßt sich darstellen mit einer Markov-Kette mit Zuständen
A_g bzw. B_g, wenn A bzw. B gewinnt, und Zuständen
A_w bzw. B_w, wenn A bzw. B würfelt.

Diagramm



(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der A gewinnt.

Lösung

Für die Ankunftswahrscheinlichkeiten stellt man gemäß der allgemeinen Methode folgende Gleichungen auf:

$$f_{A_w,A_g} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot f_{B_w,A_g} \quad \text{und} \quad f_{B_w,A_g} = \frac{5}{6} \cdot f_{A_w,A_g}\,.$$

Lösung: $f_{A_w,A_g} = \frac{6}{13}$.

A gewinnt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{13}$.

(2) Wie lange dauert das Spiel im Mittel?

Lösung

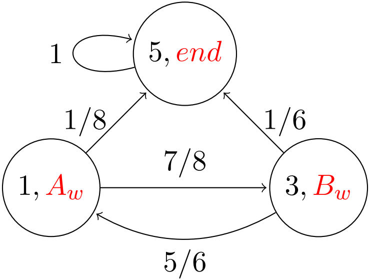
Bezeichnen wir mit h_A bzw. h_B die erwartete Spieldauer, wenn A bzw. B an der Reihe ist.

Offenbar kann man die erwarteten Übergangszeiten $h_{i,2}$ bzw- $h_{i,4}$ nicht berechnen, dann Sie existieren nicht!
Es gelten $f_{i,2} \neq 1$ und $f_{i,4} \neq 1$.

Andererseits geht das Spiel mit Wahrscheinlichkeit 1 zu Ende.

Die Spieldauer h_A ist das Minimum der Zeiten, um vom Zustand 1 in einen Zustand 2 oder 4 zu kommen.

Entsprechend ist
die Spieldauer h_B das Minimum der Zeiten, um vom Zustand 3 in einen Zustand 2 oder 4 zu kommen.
Wir identifizieren die Zustände 2 und 4,
und bezeichnen den neuen Zustand mit Nr. 5.



Nun wenden wir die Methode des Gleichungssystems für $h_{i,j}$ an.

Es folgt

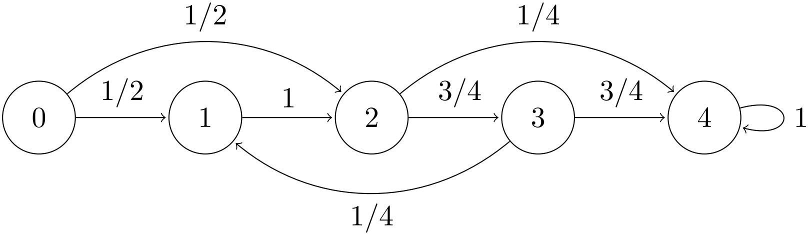
$$h_A = 1 + \frac{7}{8} h_B \quad \text{und} \quad h_B = 1 + \frac{5}{6} h_A \,.$$

Lösung: $h_A = \frac{90}{13}$.

Die erwartete Spieldauer ist also $\frac{90}{13}$.

2.5 Beispiel 2

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine endliche (zeit)homogene Markov-Kette mit diskreter Zeit über der Zustandsmenge $S = \{0,1,2,3,4\}$. Die positiven Übergangswahrscheinlichkeiten seien durch das folgende Übergangsdiagramm gegeben:



1. Geben Sie die Menge der transienten Zustände der Markov-Kette an.
2. Sei T_{01} die Übergangszeit vom Zustand 0 in den Zustand 1. Bestimmen Sie $\Pr[T_{01} = n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$!
3. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit f_{01}!
4. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit h_{14}!

(1) Geben Sie die Menge der transienten Zustände der Markov-Kette an.

Lösung

Ein Zustand i ist transient, falls $f_i < 1$,

d.h. es gibt einen von i ausgehenden Pfad,
der sich nicht zu i zurück verlängern lässt.

Ergebnis: Alle Zustände $\{0, 1, 2, 3\}$ außer Zustand 4 sind transient.

(2) Sei T_{01} die Übergangszeit vom Zustand 0 in den Zustand 1. Bestimmen Sie $\Pr[T_{01} = n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

Lösung

$\Pr[T_{01} = 1] = \frac{1}{2}$,

$\Pr[T_{01} = 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.

Für alle übrigen n gilt $\Pr[T_{01} = n] = 0$.

(3) Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit f_{01}!

Lösung

Aus der Dichte von T_{01} oder mit Hilfe eines Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} f_{01} &= p_{01} + p_{00} f_{01} + p_{02} f_{21} + p_{03} f_{31} + p_{04} f_{41} \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f_{21}\,, \\ f_{21} &= \tfrac{3}{4} f_{31}\,, \\ f_{31} &= \tfrac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $f_{21} = \frac{3}{16}\,,\ f_{01} = \frac{19}{32}\,.$

(4) Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit h_{14} !

Lösung

Mit Hilfe eines Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
h_{14} &= 1 + p_{10}h_{04} + p_{11}h_{14} + p_{12}h_{24} + p_{13}h_{34} \\
&= 1 + h_{24}\,, \\
h_{24} &= 1 + \tfrac{3}{4}h_{34}\,, \\
h_{34} &= 1 + \tfrac{1}{4}h_{14}\,.
\end{aligned}
$$

Es folgt $h_{34} = \frac{24}{13}$, $h_{24} = \frac{31}{13}$, $h_{14} = \frac{44}{13}$.

3. Aufgaben

3.1 Blatt 11, VA 1

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0, 1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.
2. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.
3. Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

Dabei sind X_0 und X_1 als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$ zu betrachten mit

$$\Omega = \{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in Q\},$$

$$\Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$

$$X_0((x_0, x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0, x_1)) = x_1.$$

(1) Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.

Lösung

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 \cdot P \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}5\Big) \\ &= (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5) \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.

Lösung

Für stationäre Lösungen (s_0, s_1, s_2) muss gelten

$$(s_0, s_1, s_2) = (s_0, s_1, s_2) \cdot P$$

mit Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{2} s_i = 1.$$

Wegen

$$(s_0, s_1, s_2) \cdot P = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5)$$

folgt

$$(s_0, s_1, s_2) = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5).$$

(3) Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

Lösung

Es seien q_0 und q_1 die diskreten Verteilungen von X_0 und X_1. Für die Unabhängigkeit von X_0 und X_1 genügt der Nachweis der Gleichung

$$\Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1}$$

für alle $x_0, x_1 \in \{0, 1, 2\}$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1} &= (q_0)_{x_0} \cdot (q_0 P)_{x_1} \\
&= (q_0)_{x_0} \cdot \left(\sum_{i=0}^{2} (q_0)_i \, p_{i,x_1} \right) \\
&= (q_0)_{x_0} \cdot (p_{x_0,x_1}) \\
&= \Pr[(x_0, x_1)].
\end{aligned}$$

3.2 Blatt 11, VA 2

1. Wir betrachten Markov-Ketten M mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? Begründung!
2. Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$
Begründung!
3. Gegeben sei eine Markov-Kette M mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

(1) Wir betrachten Markov-Ketten M mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? Begründung!

Lösung

Hätte M 6 transiente Zustände, dann würden alle 6 Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit verlassen werden können bei $n > 6$ Übergängen.

Dies ist nicht möglich, weil sich mindestens 1 Zustand nach 6 Übergängen wiederholen muss.

Andererseits gibt es ein Beispiel einer Markovkette, mit einem einzigen absorbierenden Zustand, der von allen anderen 5 Zuständen aus erreichbar ist.

Im Ergebnis ist die maximale Zahl transienter Zustände gleich 5.

(2) Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$

Begründung!

Lösung

Eine stationäre Verteilung $\pi = (c_1, c_2)$ erfüllt zum einen die Gleichung

$$c_1 + c_2 = 1$$

und ist auch ein Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1, erfüllt also auch die Gleichung

$$\pi = \pi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Die Lösung ergibt sich eindeutig mit

$$c_1 = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{3}{5}\,.$$

Man kann auch ohne Rechnung sehen, dass es höchstens eine einzige Lösung geben kann.

Gäbe es noch eine zweite stationäre Lösung, dann müssten alle Verteilungen stationär sein, denn der Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert 1 wäre dann 2-dimensional.

Offensichtlich aber ist z. B. $q = (1, 0)$ nicht stationär.

(3) Gegeben sei eine Markov-Kette M mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

Lösung

Sei $M = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ und $(q_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der entsprechenden Verteilungen der X_t. Für eine beliebige Anfangsverteilung q_0 gilt bereits $q_t(0) = \Pr[X_t = 0] = \frac{1}{3}$ für alle $t > 0$.
Dies zeigt die folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
q_t(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{t-1}(n) \cdot p_{n,0} \\
&= \underbrace{(q_{t-1}(0) + q_{t-1}(1) + q_{t-1}(2) + \dots)}_{=1} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $q_t(n)$, dass X_t im Zustand n ist, ist für alle $n \geq 1$ gegeben durch

$$q_t(n) = q_{t-1}(n-1) \cdot p_{n-1,n} = q_{t-1}(n-1) \cdot \frac{2}{3}\,.$$

Wir erhalten

$$(\forall t \geq n) \;\; \left[p_t(n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] .$$

Wenn man also den Zeitpunkt t genügend groß wählt, dann wird der Zustand n mit der berechneten Wahrscheinlichkeit angenommen.

3.3 Blatt 12, ZA 8

Viel Erfolg bei der Endterm!