

---

## Diskrete Strukturen

---

### Hin.Ti's zu HA Blatt 5

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

#### ad HA 1:

1. Verwenden Sie die in HA 4, Blatt 3 hergeleitete Wahrheitstabelle und gehen nach TA 1.2, Blatt 3 vor.
2. Lesen Sie aus der gegebenen Formel  $G$  deren Wahrheitstabelle ab und wenden Sie das Berechnungsverfahren aus der Vorlesung (Tutoraufgabe) an.

#### ad HA 2:

Machen Sie sich zunächst die Intuition der Autorität als „maximales“ Element klar, d.h., dass es zu keiner Autorität  $x$  ein „echt größeres“ Element  $y$  geben kann, d.h. ein  $y$ , so dass  $(x, y) \in R$  gilt und gleichzeitig  $(y, x) \notin R$ .

1. Reicht es aus,  $R = \{(1, 1)\}$  zu setzen?
2. Verneinen Sie die Formel  $E$  entsprechend der Formel nach DeMorgan.
3. Eine Autorität  $x$  von  $R$  hat die Eigenschaft, dass für alle  $y \in M$  gilt:  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ . Ist in  $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$  die Zahl  $x = 3$  eine Autorität? Ist  $x = 1$  eine Autorität in diesem  $R$ ?
4. Grundsätzlich könnten wir alle endlich vielen transitiven Relationen über  $M$  auflisten und jede dann daraufhin prüfen, ob die Relation eine Autorität besitzt. Es macht weniger Arbeit, einen Widerspruchsbeweis zu führen.

Nehmen Sie also ein  $R$  an, das transitiv ist und  $\neg E$  erfüllt, d.h. keine Autorität besitzt.

Dann ist  $x_1 = 1$  keine Autorität und es gilt entweder für  $y = 2$  oder  $y = 3$  die Aussage  $(1, y) \in R \wedge (y, 1) \notin R$ .

Nehmen wir o.B.d.A. an, dass für  $y = 2$  die Aussage gilt  $(1, 2) \in R \wedge (2, 1) \notin R$ .

Seien nun  $x_2 = 2$  und  $x_3 = 3$  ebenfalls keine Autorität. Leiten Sie nun einen Widerspruch zur Transitivität von  $R$  her.

**ad HA 3:**

Zeigen Sie zunächst durch Umformung nach DeMorgan, dass gilt

$$(\exists u \forall v)[\neg P(u, v)] \equiv \neg(\forall x \exists y)[P(x, y)].$$

**ad HA 4:**

1. Setzen Sie die Formel für  $L_n$  und  $L_{n+1}$  ein und überprüfen Sie die Gleichung durch Rechnung.
2. Rechnen Sie  $L_0$  und  $L_1$  aus, um einen Induktionsanfang zu gewinnen. Für den Beweis des Induktionsschritts benutzen Sie die in (1) bewiesene Gleichung.