Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Arbeitsblatt 2
29. Oktober 2012

Diskrete Strukturen

Arbeitsblatt 2: p^q

Hinweis: *Arbeitsblätter in diesem Semester dienen grundsätzlich der selbstständigen Vorbereitung von Hausaufgaben und Tutoraufgaben mit thematischen Schwerpunkten.*

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q. Die Potenz p^q ist auf natürliche Weise für alle ganzen Zahlen p, q definiert, wobei $p = 0$ einen Sonderfall bildet. In der reellen Analysis wird diese Potenz auf positive reelle Zahlen p und beliebige reelle Zahlen q zur sogenannten „allgemeinen Potenz“ p^q erweitert, die schließlich sogar für komplexe Zahlen q sinnvoll ist. Die Funktionentheorie vollendet dann die Erweiterung zur allgemeinen Potenz z^w für beliebige komplexe Zahlen z, w mit $z \neq 0$ auf einer sogenannten „Riemannschen Fläche“.

Natürlich werden wir in den Diskreten Strukturen die Potenz p^q nicht in größtmöglicher Allgemeinheit behandeln, sondern mit den elementaren Eigenschaften der beteiligten Funktionen beginnen und später insbesondere die Potenzierung von komplexen Zahlen betrachten.

Die aus der Potenz p^q bei konstantem q abgeleitete Funktion x^q nennt man Potenzfunktion, und die Funktion p^x bei konstantem p nennt man Exponentialfunktion mit dem Spezialfall der Eulerschen e-Funktion e^x. Die Umkehrung von p^x führt auf die für alle positiven reellen Zahlen y definierte Logarithmusfunktion $\log_p y$, d. h., es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$

$$\log_p p^x = x \quad \text{und} \quad p^{\log_p y} = y\,.$$

Man nennt $\log_p x$ den Logarithmus einer Zahl x zur Basis p. Soll eine Aussage über $\log_p x$ für beliebige positive Basen gelten, so schreibt man häufig nur $\log x$. Die Formel für die Umrechnung verschiedener Basen b lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}\,.$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir $\ln x$ bzw. $\lg x$ bzw. $\operatorname{ld} x$.

Wir setzen die folgenden grundlegenden Eigenschaften der Eulerschen Exponentialfunktion als bekannt voraus, also für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$

$$0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y\,, \quad \text{insbesondere} \quad e^0 = 1, \tag{1}$$

$$z + 1 < e^z\,. \tag{2}$$

Aufgabe 1 (Logarithmieren)

Seien $0<a$, $0<b$, $0<c$ bzw. $1 < n$.
Geben Sie einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen an:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}\,, \qquad\qquad n^{\ln\ln n} = (\ln n)^{\ln n}\,.$$

Lösung

Die Beweise kann man durch Logarithmieren führen. Zum Beweis einer Gleichung $x = y$ für positive x und y beweist man zunächst $\log_d x = \log_d y$, weil daraus wegen $z = d^{\log_d z}$ sofort $x = y$ folgt. Wir zeigen also

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a} \qquad \text{bzw.} \qquad \ln n^{\ln\ln n} = \ln\,(\ln n)^{\ln n}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\log_b a^{\log_b c} &= (\log_b c)\cdot(\log_b a)\\
&= (\log_b a)\cdot(\log_b c)\\
&= \log_b c^{\log_b a}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\ln n^{\ln\ln n} &= (\ln\ln n)\cdot(\ln n)\\
&= (\ln n)\cdot\ln\,(\ln n)\\
&= \ln\,(\ln n)^{\ln n}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Funktionalgleichung)

Für jede positive reelle Zahl a gibt es genau eine Funktion $(a^x) : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, die die Eigenschaften

$$a^0 = 1, a^1 = a \quad \text{und} \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

erfüllt. Beweis!

Bemerkung: a^x besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$. Dieser Sachverhalt wird uns in der Vorlesung DWT im 4. Semester wieder begegnen.

Lösung

Die Existenz einer Funktion (a^x) mit den geforderten Eigenschaften beweist man durch die Definition $a^x := e^{x\ln a}$. Dann gelten offenbar $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Wir zeigen die Eindeutigkeit wie folgt. Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften $f(0) = 1$, $f(1) = a$ und $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.

Nun zeigen wir die Gleichung $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und oben definierte Funktion a^x:

Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f(x) = f(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{x\times}) = \underbrace{f(1)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(1)}_{x\times} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{x\times} = a^x$.
Sei $-x \in \mathbb{N}$. Dann gilt $1 = f(0) = f(x - x) = f(x)\cdot f(-x) = f(x)\cdot a^{-x}$. Daraus folgt $f(x) = a^x$.
Seien $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(f(\frac{m}{n}))^n = f(m)$. Daraus folgt $f(x) = \sqrt[n]{f(m)} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
Damit haben wir $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gezeigt.