

Satz 222

Einige wichtige Erzeugendenfunktionen:

1

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

2

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1 + z}$$

3

$$\sum_{n \geq 0} z^{2n} = \frac{1}{1 - z^2}$$

4

$$\sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} z^n = (1+z)^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

5

$$\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

6

$$\sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$$

7

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

8

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = \ln(1 + z)$$

Beweis:

- 1 s. o.
- 2 Setze in (1) $z \mapsto -z$.
- 3 Setze in (1): $z \mapsto z^2$.
- 4 Der Fall $a \in \mathbb{N}_0$ wird durch den Binomialsatz gezeigt, für allgemeine a verweisen wir auf die *Analysis*.

5

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n &= \sum_{n \geq 0} \binom{-c}{n} (-1)^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{-c}{n} (-z)^n \\ &\stackrel{(4)}{=} (1-z)^{-c}\end{aligned}$$

- 6 Setze in (5) $c := m + 1$.



Beispiel 223

Sei

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist

$$z^m \cdot A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^{n+m} = \sum_{n \geq m} a_{n-m} \cdot z^n.$$

Beispiel (Forts.)

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} &\stackrel{\text{Folie 376(6)}}{=} z^m \cdot \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} \cdot z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} z^{m+n} = \sum_{n \geq m} \binom{n}{n-m} z^n \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{n-m} \cdot z^n . \end{aligned}$$

(*) Das Gleichheitszeichen gilt, da für $n < m$

$$\binom{n}{n-m} = 0$$

ist.

4.11 Auflösung von Rekursionsgleichungen

Beispiel 224

$$a_0 = 2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n \quad \text{für alle } n \geq 1$$

lineare inhomogene Rekursionsgleichung 1. Ordnung

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^n$$

$$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2} + 2^{n-1} \quad | \cdot (-2)$$

$$a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} + 2^n - 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$$

lineare homogene Rekursionsgleichung 2. Ordnung

Beispiel (Forts.)

Zu dieser linearen Rekursionsgleichung

$$a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2} = 0$$

gehört das folgende *charakteristische Polynom*:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0$$

Später wird gezeigt, dass die a_n hier von der Form

$$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

sind. Aus den Anfangsbedingungen ($a_0 = 2, a_1 = 6$) ergibt sich $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$.

Damit gilt

$$a_n = (n + 2) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 0$$

Beispiel (Forts.)

Man zeigt auch allgemein, dass

$a_n = (c_1 \cdot n + c_2) \cdot 2^n$ folgende Bedingung erfüllt:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

Beispiel 225

Sei $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$ und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad \forall n \geq 3$$

(also $(a_i)_{i \geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots)$). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x - i)(x + i). \end{aligned}$$

Setze nun $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$. Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann $c_1 = 1$ und $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

Satz 226

Sei (q_1, q_2, \dots, q_d) eine gegebene Folge, $q_i \in \mathbb{C}$, $d \geq 1$, $q_d \neq 0$. Sei weiter

$$q(z) := 1 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_dz^d$$

Das *reflektierte Polynom* dazu ist

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1z^{d-1} + q_2z^{d-2} + \dots + q_d$$

(Bemerkung: $q^R(z)$ ist das *charakteristische Polynom*). Seien $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$ die verschiedenen Nullstellen von q^R , sei d_i die Vielfachheit von α_i . Damit ist

$$\sum_{i=1}^k d_i = d.$$

Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge $(f_n)_{n \geq 0}$, mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- ① **Lineare Rekursion:** (d ist die *Ordnung* der Rekursion)

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0 \right]$$

- ② **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom $p(z)$ vom Grad $< d$.

Satz 226 (Forts.)

- ③ **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome g_i , $\deg(g_i) < d_i$ für $i = 1, \dots, k$, so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

- ④ **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome p_i , $\deg(p_i) < d_i$, so dass*

$$(\forall n \geq 0) \left[f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n \right]$$

Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n \geq 0} : (f_n)_{n \geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen $V_i = V_j$, genügt es daher, $V_i \subseteq V_j$ zu zeigen.

Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$: Sei $(f_n)_{n \geq 0} \in V_2$. Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d) \cdot \sum_{n \geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit $\deg(p) \leq d - 1$, also $[z^{d+n}]p(z) = 0$ für alle $n \geq 0$. Betrachte für $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \dots + f_n q_d = 0.$$

Damit gilt, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_1,$$

also $V_2 \subseteq V_1$, und damit $V_1 = V_2$.

Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$: Sei $(f_n)_{n \geq 0} \in V_3$, also

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}.$$

Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q\left(\frac{1}{z}\right),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) &= \left(q^R(z)\right)^R = \left(\prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{z} - \alpha_i\right)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}. \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^k \left(g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j = d,$$

also $V_3 \subseteq V_2$ und damit $V_2 = V_3$.

- $V_3 = V_4$: Sei

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_3.$$

Zu zeigen ist, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_4.$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} \quad \deg(g_i(z)) < d_i .$$

Aus Satz 222 (5) (Folie 376) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n.$$

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot \alpha_i^n z^n .\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1} \cdot \alpha_i^n}_{p_i(n)} \right) \cdot z^n \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n .$$

Es gilt, dass $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $(f_n)_{n \geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. \square

Anwendung: Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

- ① Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$

mit

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- 2 Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\ &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \end{aligned}$$

- 3 Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

- 4 Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b , so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z}.$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(z) &= z \left(\frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z} \right) \\ &= z \left(a \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n + b \sum_{n \geq 0} \beta^n z^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} (a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}) z^n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} F_n &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.