

## Beispiel (Forts.)

*Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!  
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:*

①  $P_n \Rightarrow P_{n-1}$

②  $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

## Beispiel (Forts.)

④ Sei

$$b := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Damit:

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1} &= \left( \prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot b \stackrel{P_n}{\leq} \left( \frac{1}{n} \left( b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \right)^n \\ &= \left( \frac{1 + \frac{1}{n-1}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^n = \left( \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^n \\ &\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1} \end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

② Es gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2n} a_i &= \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left( \prod_{i=n+1}^{2n} a_i \right) \\ &\stackrel{P_n}{\leq} \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \right)^n \cdot \left( \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^n \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \right) \cdot \left( \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right) \right)^n \\ &\stackrel{P_2}{\leq} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^{2n} = \left( \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} a_i \right)^{2n} \\ &\Rightarrow P_{2n}\end{aligned}$$



## 4.8.2 Differenzenoperator

### Definition 198

Sei  $f$  eine Funktion von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{C}$ . Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit  $E(f)(x) := f(x + 1)$  heißt **Translationsoperator**.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit  $\Delta(f)(x) := f(x + 1) - f(x)$  heißt **(Vorwärts-)Differenzenoperator**.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit  $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x - 1)$  heißt **(Rückwärts-)Differenzenoperator**.

Mit  $I$  als dem Identitätsoperator (also  $I(f) = f$ ) können wir auch schreiben

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

## Beispiel 199

Sei  $a \in \mathbb{N}_0$ :

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \dots \circ E)}_a(f)(x) = f(x + a)$$

## Beobachtungen:

Seien  $P, Q$  Operatoren  $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$ , sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

1

$$(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$

2

$$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3

$$(QP)(f) = Q(P(f)), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4

$$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \dots (E - I)}_n = \sum_{k=0}^n \left( (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right)$$

## Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned}\Delta^n(f)(x) &= \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k) .\end{aligned}$$

Beweis:

Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3) \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^2 (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

### 4.8.3 Fallende Fakultät

#### Definition 202

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $\frac{x^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x-n}$ .

Damit für  $n = -1$  „formal“:

$$x^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

Und für  $n$  ersetzt durch  $-n$ :

$$x^{-n} = \frac{x^{-n+1}}{x+n}$$

$$x^{-n} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{-\overline{n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$



## Lemma 203

Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

1

$$\Delta x^n = n \cdot x^{n-1}$$

2

$$\nabla x^{\bar{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Bemerkung: Wir schreiben hier offensichtlich  $\Delta x^n$  für  $\Delta(x^n)$  und verstehen implizit  $x$  als das Argument der Funktion, auf die der  $\Delta$ -Operator angewendet wird.

## Beweis:

(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$ :

$$\begin{aligned}\Delta x^n &= (x+1)^n - x^n \\ &= (x+1) \cdot x^{n-1} - (x-n+1) \cdot x^{n-1} \\ &= n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

- $n = 0$ :

$$\Delta x^0 = (x+1)^0 - x^0 = 0 = 0 \cdot x^{-1}$$

## Beweis (Forts.):

- $n < 0$ . Setze  $m := -n$ :

$$\begin{aligned}\Delta x^{-m} &= (x+1)^{-m} - x^{-m} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\ &= \frac{(x+1) - (x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\ &= -m \cdot x^{-m-1}\end{aligned}$$



## 4.8.4 Diskrete Stammfunktion

### Definition 204

Sei  $f$  so, dass  $\Delta f = g$ . Dann heißt  $f$  eine **diskrete Stammfunktion** von  $g$ . Schreibweise:  
 $f = \sum g$ .

### Satz 205

Sei  $f$  eine diskrete Stammfunktion von  $g$ . Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^b g(i) = f(b+1) - f(a)$$

### Beweis:

Wegen  $\Delta f = g$  gilt  $g(i) = f(i+1) - f(i)$ , also

$$\sum_{i=a}^b g(i) = \sum_{i=a}^b (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

□

## Beispiel 206

$$\sum x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

für  $n \neq -1$ .

## Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{-1}.$$

Dann ist (für  $x \in \mathbb{N}$ )

$$f(x+1) - f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A.  $f(0) = 0$ , damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

## Beispiel 208

Es ist  $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a - 1) \cdot a^x$ .

$$\Delta \frac{a^x}{(a - 1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a - 1)} + C$$

## Beispiel 209

Was ist  $\sum_{k=0}^n k^2$ ? Es gilt:

$$x^2 = x^2 + x^1.$$

Also:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k^2 &= \left( \sum x^2 + \sum x^1 \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{3} + \frac{(n+1) \cdot n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n + \frac{1}{2})(n+1)}{3}.\end{aligned}$$