Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k\right].$$

Beweis:

(Vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^{\underline{0}} = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= (x-n) \cdot x^{\underline{n}} \\
&\overset{\text{IA}}{=} (x-n) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot \left(s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k} \right) \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k
\end{aligned}
$$

$\square$

4.7.3 Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma 186

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \ .$$

Beweis:

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt

entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \cdots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von}\\ \{1,\ldots,n-1\}\\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten

Beweis (Forts.):

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \ldots \uplus N_k$$

Streiche n. Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \ldots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1,\ldots,n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:
$\Rightarrow$ insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. $\square$

Stirling-Dreieck der zweiten Art

$S_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

Einige Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
S_{n,1} &= 1\\
S_{n,2} &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1\\
S_{n,n-1} &= \binom{n}{2}\\
S_{n,n} &= 1
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Es gibt auch andere Notationen für die Stirling-Zahlen zweiter Art, z. B.:

$$S_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

z. B. in Graham, Knuth, Pataschnik: Concrete Mathematics

4.7.4 Auflistung von Permutationen

Definition 187

Seien $\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \cdots\ \pi_n)$ und $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_n)$ zwei Permutationen aus S_n, $\pi \neq \sigma$, als Wertevektor geschrieben (d.h. $\pi_i = \pi(i)$ etc.). Dann heißt π lexikographisch kleiner als σ, geschrieben $\pi < \sigma$, genau dann, wenn

$$(\exists 1 \le k \le n)(\forall 1 \le i < k)\Big[(\pi_i = \sigma_i) \wedge (\pi_k < \sigma_k)\Big]\ .$$

Beispiel 188

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

Gegeben: $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

```
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix ∘ a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix ∘ k, N\{k})
    od
  fi
end
```

Aufruf: appendlexlist(λ, N)

Beispiel 189

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

4.7.5 Auflistung von Teilmengen

Sei $N = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $|N| = n$.

Definition 190

Seien $A, B \subseteq N$, $A \neq B$. Dann heißt A lexikographisch kleiner als B, geschrieben $A < B$, wenn

$$\max\{A \mathbin{\triangle} B\} \in B$$

Beispiel 191

$N = \{0, 1, 2\}$;

$$2^N = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1,0\}, \{2\}, \{2,0\}, \{2,1\}, \{2,1,0\}\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

1. $N = \{0, \ldots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
2. Sei $a = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0} = \left\{k \in N : 0 \leq k \leq n-1 \wedge a_k = 1\right\}$$

Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung, zweite Variante:

Sei $n \in \mathbb{N}$.

```
appendlexlist(set praefix, nat n)
  for k = 0, 1 do
    if k = 1 then praefix:=praefix ∪ {n} fi
    if n = 0 then print(praefix)
    else
      appendlexlist(praefix, n − 1)
    fi
  od
end
```

Aufruf: appendlexlist($\emptyset$, $n-1$)

4.7.6 Gray-Codes

Definition 192

Ein Gray-Code $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Permutation $(g_0, \ldots, g_{2^n-1})$ der Wörter in $\{0,1\}^n$, so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter g_i und g_{i+1}, für alle $i = 0, \ldots, 2^n - 1$, in genau einer Position unterscheiden.
$GC(n)$ heißt zyklischer Gray-Code, falls die Bedingung auch für g_{2^n-1} und g_0 gilt.

$$\begin{aligned} GC(1) &:= (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1) \\ GC(n+1) &:= \big(0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \ldots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, \\ &\qquad 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \ldots, 1 \cdot g_{n,0}\big) \end{aligned}$$

Beispiel 193

$$GC(3) = (000\ 001\ 011\ 010\ 110\ 111\ 101\ 100)$$

Lemma 194

1. *$GC(n)$ hat Länge 2^n.*
2. $\left\{g_{n,0}, \ldots, g_{n,2^n-1}\right\} = \{0,1\}^n$.
3. *für alle k unterscheidet sich $g_{n,k}$ von $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ in genau einem Bit.*

Beweis:

Folgt direkt aus der Definition. □

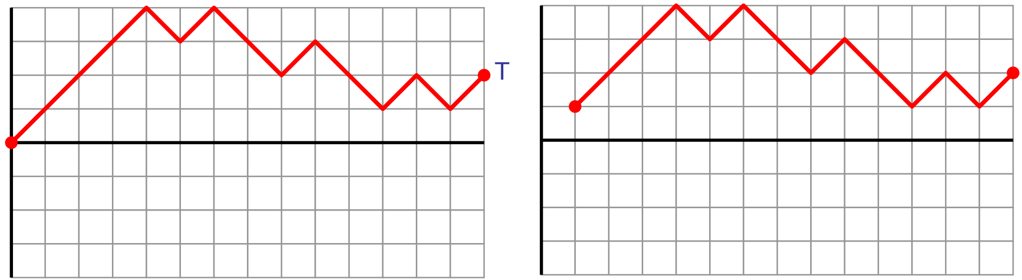
4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

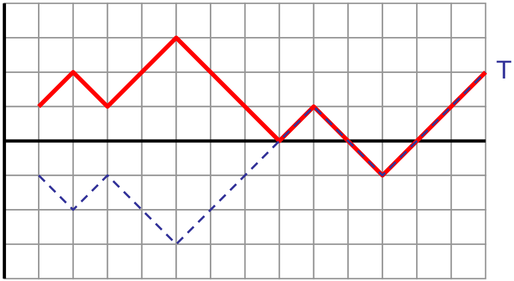
Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

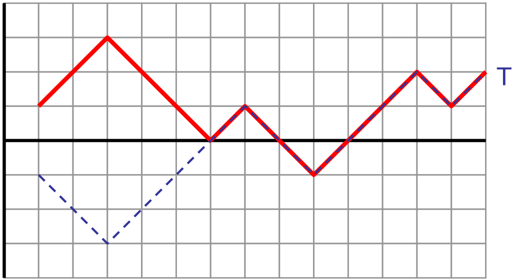
Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(a + b, a - b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten“ Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a + b, a - b)$ gleich der Anzahl der „guten“ Pfade vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt T ist:



Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten“ Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:





erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten“ Pfade von $(1, 1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1, -1)$ zu T ist.

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (0,0) \text{ zu } T = \\
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (1,1) \text{ zu } T = \\
&\qquad = \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&\qquad = \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&\qquad = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}\,.
\end{aligned}
$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

4.8 Summation und Differenzenoperator

4.8.1 Direkte Methoden

1. Indextransformation:

Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

Beispiel 195

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \cdots + n \cdot a = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n - k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

Beispiel (Forts.)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} k \cdot a + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a \right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a = \binom{n+1}{2} \cdot a \end{aligned}$$

Beispiel 196

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 4 \qquad S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$

Beispiel (Forts.)

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ *trivial*

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n + 1) - 1 \overset{\text{IA}}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n + 1)^2$$

Beispiel 197

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Das arithmetische Mittel A der a_i:

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Das geometrische Mittel G der a_i:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.

Beispiel (Forts.)

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ *trivial,* $n = 2$ *durch Einsetzen:*

$$\begin{aligned}(G \le A) &\iff \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2}\right)\\ &\iff \left(4a_1 \cdot a_2 \le (a_1 + a_2)^2\right)\\ &\iff \left(0 \le {a_1}^2 - 2a_1a_2 + {a_2}^2 = (a_1 - a_2)^2\right)\end{aligned}$$

Induktionsschluss:
Wir zeigen:
$(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{n+1}$
Sei

$$b := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \,.$$

Es gilt:

Beispiel (Forts.)

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) \cdot b^{n-1} &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot (a_{n+1} \cdot b^{n-1})\\
&\overset{\mathsf{P_n}}{\leq} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)^n\\
&= \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)\right]^n\\
&\overset{\mathsf{P_2}}{\leq} \left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}(a_{n+1} + (n-1)b)\right)\right)^2\right]^n\\
&= \left[\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + (n-1)b\right)\right]^{2n}\\
&= b^{2n}\,.
\end{aligned}
$$