Beispiel 40

Behauptung: $n! \in O(n^n)$

Beweis:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left[n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \leq 1 \cdot n^n\right]$$

$\square$

Beispiel 41

Behauptung: $\log n! \in O(n \log n)$

Beweis:

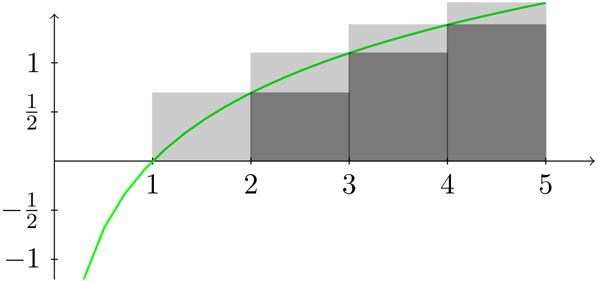
$(\forall n \in \mathbb{N})\left[\log n! = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1 < 1 \cdot n \cdot \log n\right]$ $\square$

Beispiel 42

Behauptung: $n! = O\left((n+1)\cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Beweis:

$$(\forall n > 0)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x \; dx < \sum_{k=2}^{n} \ln k < \int_1^{n+1} \ln x \; dx\right]$$



□

Es ist

$$\int_1^n \ln x \; dx = (x \cdot \ln x - x)\Big|_1^n = n \cdot \ln n - n + 1$$

und

$$\int_1^{n+1} \ln x \; dx = (n+1) \cdot \ln(n+1) - n$$

Also:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \Big[n \cdot \ln n - n + 1 < \ln n! < (n+1) \cdot \ln(n+1) - n \Big]$$

und damit

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

oder:

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le (n+1) \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\square$

Die Stirling'sche Formel

$$\lim_{n\to\infty} \left(n! \Big/ \left(\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \right) \right) = \sqrt{2\pi}$$

oder mit anderen Worten:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$$

Kapitel II Algebraische Grundlagen

1. Algebren

1.1 Grundbegriffe

Definition 43

Eine Algebra besteht aus einer Trägermenge S und einer Menge Φ von Operationen auf S (der Operatorenmenge). Dabei gilt: Jeder Operator ist eine (totale) Abbildung

$$S^m \to S$$

der Stelligkeit (Arität, arity) $m \in \mathbb{N}_0$.

- Nullstellige Operatoren sind Konstanten, z. B. 0, 47, $\perp$.
- Einstellige Operatoren sind unäre Operatoren, z. B. $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \neg x$, $A \mapsto 2^A$.
- Zweistellige Operatoren sind binäre Operatoren, z. B. $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto \mathrm{ggT}(x, y)$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- Dreistellige Operatoren sind ternäre Operatoren, z. B. $(x, y, z) \mapsto$ **if** x **then** y **else** z **fi**

Beispiel 44

Sei U eine Menge, F die Menge der Funktionen von $U \to U$. $(F, \circ)$ ist eine Algebra mit $\circ$ als Komposition von Funktionen.

Beispiel 45

Boolesche Algebra:
$(\{t, f\}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\})$ ist eine (endliche) Algebra.

1.2 Eigenschaften

Signatur einer Algebra

Definition 46

Die Signatur einer Algebra besteht aus der Liste der Stelligkeiten der Operatoren.

Beispiel 47

$(\mathbb{B}, \{t, f, \neg, \wedge, \vee\})$ (Boolesche Algebra, $\mathbb{B} = \{t, f\}$): 0, 0, 1, 2, 2

$$\begin{array}{ccccc} \neg & : & \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ \wedge & : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \\ \vee & : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \to & \mathbb{B} \end{array}$$

Beispiel 48

$(2^U, \{U, \emptyset, \bar{\ }, \cap, \cup\})$: 0, 0, 1, 2, 2

$$\begin{array}{cccc} \bar{\ } & : & 2^U & \to 2^U \\ \cap & : & 2^U \times 2^U & \to 2^U \\ \cup & : & 2^U \times 2^U & \to 2^U \end{array}$$

Diese beiden Algebren haben dieselbe Signatur; die Trägermenge ist unwesentlich, es kommt nur auf die Reihenfolge der Stelligkeiten an.

Einselement, Nullelement, Inverses

Sei $(S, \circ)$ eine Algebra, $\circ$ beliebiger zweistelliger Operator.

Definition 49

- Ein Element $1 \in S$ heißt linkes (bzw. rechtes) Einselement für den Operator $\circ$, falls

$$(\forall a \in S) \quad 1 \circ a = a \text{ (bzw. } a \circ 1 = a)$$

  1 heißt Einselement, falls es linkes und rechtes Einselement ist.
- Ein Element $0 \in S$ heißt linkes (bzw. rechtes) Nullelement für den Operator $\circ$, falls

$$(\forall a \in S) \quad 0 \circ a = 0 \text{ (bzw. } a \circ 0 = 0)$$

  0 heißt Nullelement, falls es linkes und rechtes Nullelement ist.
- Sei 1 Einselement. Für $a \in S$ heißt $a^{-1} \in S$ Rechtsinverses von a, falls

$$a \circ a^{-1} = 1$$

  Analog: Linksinverses

Beispiel 50

Betrachte $F(U)$, d. h. die Menge aller Abbildungen $U \to U$. Dann gilt (mit der Komposition als Operator):

- $f \in F(U)$ hat genau dann ein Rechtsinverses, wenn f surjektiv ist.

  $$f \circ f^{-1} = id$$

  (Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g, so dass gilt: $g(x)$ wird von f auf x abgebildet.)
- $f \in F(U)$ hat genau dann ein Linksinverses, wenn f injektiv ist.

  $$f^{-1} \circ f = id$$

  (Wähle für f^{-1} irgendeine Funktion g, so dass gilt: $f(x)$ wird von g auf x abgebildet.)

Ist f bijektiv, dann stimmen die beiden f^{-1} aus (1) und (2) überein.

Satz 51

Falls c linkes Einselement ist und d rechtes Einselement (bezüglich des binären Operators $\circ$), dann ist

$$c = d \; .$$

Beweis:

$$d = c \circ d = c \; .$$

$\square$

Satz 52

Falls c linkes Nullelement und d rechtes Nullelement (bezüglich $\circ$) ist, dann ist

$$c = d\ .$$

Beweis:

$$c = c \circ d = d\ .$$

$\square$

Beispiel 53

Betrachte $(\{b, c\}, \{\bullet\})$ mit

$\bullet$	b	c
b	b	b
c	c	c

Es gilt: b und c sind linke Nullelemente, und b und c sind rechte Einselemente.

Abgeschlossenheit

Definition 54

Sei (S, Φ) eine Algebra, T eine Teilmenge von S.

- T ist unter den Operatoren in Φ abgeschlossen (stabil), falls ihre Anwendung auf Elemente aus T wieder Elemente aus T ergibt.
- (T, Φ) heißt Unteralgebra von (S, Φ), falls $T \neq \emptyset$ und T unter den Operatoren $\in \Phi$ abgeschlossen ist.

Beispiel 55

- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist Unteralgebra von $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\{0, 1\}, \ \cdot\ )$ ist Unteralgebra von $(\mathbb{N}_0, \ \cdot\ )$
- $(\{0, 1\}, +)$ ist keine Unteralgebra von $(\mathbb{Z}, +)$, da sie nicht abgeschlossen ist $(1 + 1 = 2)$.