

---

## Diskrete Strukturen

---

Abgabetermin: 2. November 2011, 17 Uhr in die DS Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen und der Ergebnisse aus Hausaufgabe 4 von Blatt 1:

1. Für jede ganze Zahl  $x$  ist mindestens eine der Zahlen  $x$  und  $x + 1$  gerade.
2. Jede ganze Zahl  $x$ , die ungerade ist, ist nicht gerade.
3. Sei  $x \in \mathbb{N}$ , d. h. eine positive ganze Zahl, und  $y = x + 10$ . Dann sind die Zahlen 3 und 20 keine gemeinsamen Teiler von  $x$  und  $y$ .
4. Bestimmen Sie die Menge der gemeinsamen Teiler von 220 und 235 in extensionaler Schreibweise (Auflistung). Welches ist der größte gemeinsame Teiler von 220 und 235, d. h.  $ggT(220, 235)$ ?

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Es seien zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  durch ihre Darstellung  $g_a, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$  für  $a$  bzw.  $g_b, b_1 b_2 b_3 \dots b_n b_{n+1} \dots$  für  $b$  als unendlicher Dezimalbruch gegeben (siehe Arbeitsblatt 1). Wir nehmen an, dass  $a_{101} + b_{101} > 9$  gilt.

Geben Sie ein Verfahren an zur Berechnung der ersten 100 Dezimalstellen  $c_i$  nach dem Komma der Darstellung der Summe  $c = a + b$  als unendlicher Dezimalbruch  $g_c, c_1 c_2 c_3 \dots c_n c_{n+1} \dots$ .

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Gegeben seien  $A = \{x, b, 35, \epsilon\}$ ,  $B = \{x, b, 2, 3, \delta, x\}$  und  $C = \{\alpha, 2, 3, x\}$ . Wir definieren  $D = B \cup (A \cap C)$ ,  $E = D \cap (A \cup B)$ ,  $F = E \cup (A \setminus C)$  und  $G = F \cap (A \cup C)$ . Berechnen Sie eine extensionale Darstellung von  $G$ .
2. Berechnen Sie die Potenzmenge von  $A = \{\{1, a\}, \{a, c\}, c\}$ . Wie viele Elemente besitzt die Menge  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ ?

### Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

1.  $\log_{10} 5$  ist keine rationale Zahl (d. h.  $\log_{10} 5 \notin \mathbb{Q}$ ).
2. Zu jeder positiven rationalen Zahl  $y$  (i. Z.  $y \in \mathbb{Q}^+$ ), gibt es eine reelle Zahl  $x$  (i. Z.  $x \in \mathbb{R}$ ), so dass  $\log_{10} x = y$  gilt.

Die Aussagen der Vorbereitungsaufgabe 3 dürfen benutzt werden.

---

**Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

---

## Vorbereitung 1

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche  $\leq$ -Ordnung der Zahlen [6].  
Wie ergibt sich die  $\leq$ -Ordnung auf [6] aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?
2. Wir entfernen das Paar  $(3, 4)$  aus der Relation  $\leq$  auf  $\mathbb{N}$ . Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!
3. Für welche Mengen  $M$  ist die Inklusionsrelation  $\subseteq$  auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  eine totale Ordnung? Begründung!

## Vorbereitung 2

1. Gibt es eine injektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ? Begründung!
2. Gibt es eine surjektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ? Begründung!
3. Gilt für  $f : X \rightarrow Y$  und  $A \subseteq X$  stets  $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ ? Begründung!

## Vorbereitung 3

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz  $p^q$ . Die daraus abgeleitete Funktion  $x^a$  nennt man Potenzfunktion, und die Funktion  $a^x$  Exponentialfunktion mit dem Spezialfall  $e^x$ . Die Umkehrung von  $a^x$  führt auf die Logarithmusfunktion  $\log_a x$ .

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl  $x$  zur Basis  $b$  mit  $\log_b x$  bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige positive Basen gelten, so schreibt man häufig  $\log x$ . Die Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}.$$

Für  $b = e$  bzw.  $b = 10$  bzw.  $b = 2$  schreiben wir  $\ln x$  bzw.  $\lg x$  bzw.  $\text{ld } x$ .

Im Folgenden setzen wir die grundlegenden Eigenschaften der Logarithmus- bzw. Exponentialfunktion als bekannt voraus, also z. B.  $0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ,  $e^0 = 1 < e^z$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{R}^+$ , sowie die Stetigkeit der Funktionen.

1. Geben Sie einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n},$$

wobei  $0 < a$ ,  $0 < b$ ,  $0 < c$  bzw.  $0 < n$  vorausgesetzt wird.

2. Sei  $a > 0$  eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $f(x) = a \cdot e^x$  für alle  $0 < a \in \mathbb{R}$  bijektiv ist und für  $a = 1$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^+$  ist bezüglich der Addition von reellen Zahlen und der Multiplikation von positiven reellen Zahlen.

## Vorbereitung 4

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $F$  an, so dass  $F$  und  $\neg F$  erfüllbar ist!
2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!

## Vorbereitung 5

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen  $x, y, z$  als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y).$$

## Vorbereitung 6

Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem allgemeinen Venn-Diagramm für drei Mengen  $A, B$  und  $C$  einerseits und andererseits der Menge der Vollkonjunktionen für drei Aussagenvariablen  $p, q, r$ ?

## Vorbereitung 7

Arbeiten Sie Merkblatt 1 durch. Es dient der Vorbereitung auf Zusatzaufgaben ab Blatt 3.

## Tutoraufgabe 1

Sei  $R$  eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass  $\bigcup_{n \geq 1} R^n$  transitiv ist!
2. Sei  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $R = \{(x, y) ; y = x + 5\}$ . Geben Sie  $R^*$  an!
3. Sei  $M = [3]$ . Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen  $R$  über  $M$ . Zeichnen Sie jeweils ein Hasse-Diagramm der Relationen und geben Sie an, welche der aufgelisteten Relationen total sind.

## Tutoraufgabe 2

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen  $X, Y, A_1, A_2$  mit  $A_1, A_2 \subseteq X$  und eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , so dass  $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$  gilt.
2. Ist die Abbildung  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit  $f(x) = x^2$  injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!
3. Zeigen Sie, dass für die Komposition  $\circ$  zweier Abbildungen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  gilt: Ist  $g \circ f$  bijektiv (auf  $C$ ), dann ist  $f$  injektiv und  $g$  surjektiv (auf  $C$ ).

## Tutoraufgabe 3

Seien  $p, q, r$  Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Zeigen Sie, dass  $\neg p \vee q \neg$  keine Aussagenlogische Formel ist.
2. Wie viele boolesche Funktionen  $f(p, q)$  gibt es, so dass der Ausdruck  $f(\text{true}, q)$  für alle Belegungen stets wahr ist?
3. Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r).$$

## Tutoraufgabe 4

Seien  $q, r, s$  Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax. Die aussagenlogischen Formeln  $F$  und  $G$  seien gegeben durch

$$F = (q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s) \quad \text{und} \quad G = ((q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)) \Leftrightarrow (q \vee (r \Leftrightarrow s)).$$

1. Zeigen Sie, dass  $F$  und  $\neg F$  erfüllbare Formeln sind.
2. Bestimmen Sie die Semantik von  $G$ . Zeigen Sie, dass  $F$  und  $G$  semantisch nicht äquivalent sind, d. h.  $F \not\equiv G$ .
3. Zeigen Sie, dass  $\neg G$  ein Widerspruch ist. Was bedeutet dies für  $G$ ?