WS 2011/12

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/uebung/

21. Dezember 2011

ZÜ X

Übersicht:

1. Übungsbetrieb:	Klausur am 18. Februar 2012: Grundsätzliches Anmeldung, Termine, Ablauf
2. Ergebnisse	Zusatzaufgabe Blatt 6: Kurzreferate, Theorie
3. Thema:	Arbeitsblatt 2
4. Tipps	zu HA von Blatt 10
5. Vorbereitung	auf TA Blatt 10

1. Übungsbetrieb: Klausur am 18. Februar 2012

1.1 Grundsätzliches

Prüfungszeit:	180 Minuten
Hilfsmittel:	Sind ausgeschlossen! Ausnahme: Handbeschriebenes DIN A4 Blatt

Vorbereitung:	Konzentration:	auf Übungsstoff!
	Eigenständigkeit:	Ziel: keine Hilfsmittel!
	Privatheit:	,,dumme" Fragen erlaubt!
	Miteinander:	Austausch mit Kommilitonen!

1.2 Termin, Anmeldung, Ablauf

Termin und Ort:	Samstag, 18. Februar, 14 – 17 Uhr Hörsaaleinteilung (5 HS) siehe Übungswebseite (Prüfungswoche: nach alphab. Abschnitten), Platznummern siehe Liste am Hörsaaleingang.
Anmeldung:	21. Nov 2011– 15. Jan 2012 (TUMonline)
Ablauf:	Plätze einnehmen 15 Minuten vor Beginn. Zum Ablauf gibt es Ansagen (14.05 Uhr).

2. Ergebnisse: Zusatzaufgabe Blatt 6

Aufgabenstellung:

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ, e\rangle$ mit Einselement e, die die beidseitigen Kürzungsregeln („Sudoku-Regeln") erfüllen, d. h., dass für alle $x, y, z \in S$ die folgenden Implikationen gelten:

$$x \circ z = y \circ z \implies x = y\,, \tag{1}$$

$$z \circ x = z \circ y \implies x = y\,. \tag{2}$$

1. Zeigen Sie: Falls $|S| \leq 4$ gilt, dann ist A eine Gruppe.
2. Sei $|S| = 5$. Geben Sie bis auf Isomorphie alle nicht assoziativen Verknüpfungen $\circ$ mit obigen Eigenschaften an. Die entsprechenden Algebren sind dann also keine Gruppen.

2.1 Kurzreferate

Vielen Dank an Alle, die sich für eine Bearbeitung der Zusatzaufgabe von Blatt 6 interessiert und engagiert haben.

Vorstellung:
Isabel Max und Zoran Ristevski sind Kommilitonen in dem laufenden DS Kurs und haben sehr gute Bearbeitungen abgeliefert.

Als kleine Anerkennung dafür haben wir den beiden angeboten, vor versammelter Zuhörerschaft ein Kurzreferat über Ihren Lösungsansatz vorzustellen.

Isabel Max und Zoran Ristevski werden im Folgenden je ein ca. 5-minütiges Kurzreferat halten.

Referat 1: Isabel Max

Referat 2: Zoran Ristevski

2.2 Theorie

Sei $\langle A, \circ, e\rangle$ eine kürzbare Algebra mit neutralem Element e.

Definitionen:

$a^{0_r} := a^{0_l} := e$.

Linkspotenz: $a^{(n)_l} := a \circ a^{(n-1)_l}$.

Rechtspotenz: $a^{(n)_r} := a^{(n-1)_r} \circ a$.

Linksordnung: $\mathrm{ord}_l(a) := \min\{n \in \mathbb{N}\,;\, a^{(n)_l} = e\}$.

Rechtsordnung: $\mathrm{ord}_r(a) := \min\{n \in \mathbb{N}\,;\, a^{(n)_r} = e\}$.

Ordnungstyp von a: $(\mathrm{ord}_l(a), \mathrm{ord}_r(a))$.

Falls $\mathrm{ord}_l(a) = \mathrm{ord}_r(a)$, dann definieren wir
$\mathrm{ord}(a) := \mathrm{ord}_r(a) = \mathrm{ord}_l(a)$.

Sei A endlich.

Ordnungstyp von A:

(geordnete) Multimenge aller Ordnungstypen von $a \in A, a \neq e$.

Behauptung:
Sei $|A| = 5$.
Dann gibt es bis auf Isomorphie genau je eine Algebra eines der folgenden Ordnungstypen:

1. $\langle 2, 2, 2, 2 \rangle$,
2. $\langle 2, 5, 5, 5 \rangle$,
3. $\langle 2, (3, 5), (3, 5), (3, 5) \rangle$, und dual dazu $\langle 2, (5, 3), (5, 3), (5, 3) \rangle$,
4. $\langle (3, 5), (3, 5), 5, 5 \rangle$, und dual dazu $\langle (5, 3), (5, 3), 5, 5 \rangle$
5. $\langle (3, 5), (5, 3), 5, 5 \rangle$,
6. $\langle 5, 5, 5, 5 \rangle$.

Es gilt: Von den 8 Algebren sind alle Algebren nicht-assoziativ mit Ausnahme des letzten Typs. Eine Algebra vom Typ $\langle 5, 5, 5, 5 \rangle$ ist isomorph zu $\langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$.

3. Thema Arbeitsblatt 2

Siehe Übungswebseite.

3.1 Begriffe

Unterscheidbarkeit, Multimengen, Zuordnung von Multimengen.

3.2 Aufgaben

Studium von Zahlpartitionen.

Grundlage auch für Hausaufgaben.

4. Tipps zu HA von Blatt 10

Komplexe Zahlen:

Die HA 2 ist sehr wichtig!

Sie lernen darin die Konstruktion der komplexen Zahlen als Elemente des Restklassenkörpers über $\mathbb{R}[x]$ modulo dem Polynom $x^2 + 1$.

Ansonsten siehe Hin.Ti's zu Blatt 10.

5. Vorbereitung auf TA's Blatt 10

5.1 VA 1

In der Vorlesung wurde mit der folgenden Tabelle die Basis für eine Klassifizierung kombinatorischer Aufgabenstellungen und Lösungen geschaffen.

Die Formeln der Tabelle gelten für alle $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Wir schreiben für Mengen oder Multimengen X jeweils

$$X\{\neq\} \quad \text{bzw.} \quad X\{=\}\,, \qquad \text{falls } X \text{ aus}$$

unterscheidbaren (ungleichen) bzw.
nicht unterscheidbaren (gleichen)

Elementen besteht.

$N \longrightarrow R$ $\lvert N\rvert = n,\ \lvert R\rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r = n)$
$A:$ $N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!S_{n,r}$	$r! = n!$
$B:$ $N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$C:$ $N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} S_{n,i}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$D:$ $N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} P_{n,i}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

1. Bestimmen Sie für die Vorbereitungsaufgaben 1 bis 3 von Übungsblatt 10, mit welchen Formeln der Tabelle diese Aufgaben gelöst werden können.

   Begründen Sie die Zuordnung, indem Sie jeweils Multimengen N und R in Verbindung mit dem entprechenden Abbildungstyp angeben.

Lösung:

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 1.1:	$\|M \times M\| = m^2$	A1	$N\{\neq\} = \{1,2\}$,	$R\{\neq\} = M$
VA 1.1:	$anz_{Rel} = 2^{m^2}$	A1	$N\{\neq\} = M \times M$,	$R\{\neq\} = \{0,1\}$

Man beachte, dass in Zeile 2 eine Relation,
d.h. eine Teilmenge von $M \times M$,
eineindeutig als charakteristische Funktion $\chi : M \times M \to \{0,1\}$
dargestellt wird.

Aufg. : Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 1.2: $\binom{m^2}{k}$	B2	$\lvert N\{=\}\rvert = k$,	$R\{\neq\} = M \times M$
VA 1.3: $anz_{refRel} = 2^{m^2-m}$	A1	$N\{\neq\} = (M \times M) \setminus Id_M$,	$R\{\neq\} = \{0, 1\}$
VA 1.4: $\mathcal{P}(A \setminus B) = 2^3$	A1	$N\{\neq\} = A \setminus B$,	$R\{\neq\} = \{0, 1\}$

Über M entsprechen Äquivalenzrelationen eineindeutig den Partitionen.

Wir bezeichnen für VA 2.1 die Anzahl der Äquivalenzrelationen über M mit k Klassen mit $anz_{\textsf{\textit{ÄquRel}}}(M, k)$.

Dann gilt $anz_{\textsf{\textit{ÄquRel}}}(M, k) = S_{|M|,k}$.

Die gesamte Anzahl von Äquivalenzrelationen bzw. Partitionen über M mit $|M| = n$ bezeichnet man als Bell'sche Zahl oder Bellzahl B_n.

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 2.1:	$anz_{\text{ÄquRel}}(M,1) = 1$	C3= $S_{3,1}$	$N\{\neq\} = M$,	$\lvert R\{=\}\rvert = 1$
	$anz_{\text{ÄquRel}}(M,2) = 3$	C3= $S_{3,2}$	$N\{\neq\} = M$,	$\lvert R\{=\}\rvert = 2$
	$anz_{\text{ÄquRel}}(M,3) = 1$	C3= $S_{3,3}$	$N\{\neq\} = M$,	$\lvert R\{=\}\rvert = 3$
VA 2.2:	$B_3 = 5$	C1	$N\{\neq\} = M$,	$\lvert R\{=\}\rvert = 3$
VA 2.3:	$B_0 = 1$	C1	$N\{\neq\} = \emptyset$,	$\lvert R\{=\}\rvert = 0$

Bei VA 2.4 bezeichnen wir die Anzahl der surjektiven Abbildungen von M auf $M' = \{1, 2\}$ mit $anz_{surj}(M, M')$.

Eine injektive Operation über M ist gleichzeitig eine Permutation von M und umgekehrt (VA 2.5).

Bei VA 2.6 bestimmen wir die Anzahl $anz_{Var}(M, k)$ der Variationen der Länge k für $k = 0, 1, 2, 3$.

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 2.4:	$anz_{surj}(M, M') = 6$	A3	$N\{\neq\} = M$,	$R\{\neq\} = M'$
VA 2.5:	$anz_{inj}(M, M) = 6$	A4	$N\{\neq\} = M$,	$R\{\neq\} = M$
VA 2.6:	$anz_{Var}(M, 3) = 6$	A2$= 3^{\underline{3}}$	$N\{\neq\} = [3]$,	$R\{\neq\} = M$
	$anz_{Var}(M, 2) = 6$	A2$= 3^{\underline{2}}$	$N\{\neq\} = [2]$,	$R\{\neq\} = M$
	$anz_{Var}(M, 1) = 3$	A2$= 3^{\underline{1}}$	$N\{\neq\} = [1]$,	$R\{\neq\} = M$
	$anz_{Var}(M, 0) = 1$	A2$= 3^{\underline{0}}$	$N\{\neq\} = \emptyset$,	$R\{\neq\} = M$

VA 3.1 ist der Fall k-elementiger Multimengen.

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 3.1:	$anz_{MM}(2,7) = 28$	B1	$\|N\{=\}\| = 2,$	$R\{\neq\} = [7]$

Bei VA 3.2 liegt jener kombinierte Fall von A2 und B2 vor, den wir in der nachfolgenden Teilaufgabe behandeln.

Man kann aber auch direkt die Formel einer mehrfachen Auswahl von Teilmengen mit dem Vertauschbarkeitsargument ableiten, wie im Beweis von VA 3.2 geschehen.

In diesem Fall erhält man die Formel für die Multinomialkoeffizienten.

2. Sei $N = N_1 \uplus N_2$ eine Multimenge mit $|N| = n$, so dass die Elemente von N_1 bzw. N_2 nicht unterscheidbar sind und alle Paare $x_1 \in N_1$ und $x_2 \in N_2$ unterscheidbar sind.

   Sei R mit $|R| = r$ eine Menge mit unterscheidbaren Elementen und a die Anzahl der Möglichkeiten der injektiven Zuordnung $N \to R$.

   Man zeige die folgende Verallgemeinerung der Formeln A_2 und B_2 der Tabelle.

$$a = \binom{r}{n_1} \cdot \binom{r - n_1}{n_2}.$$

Lösung:

Man konstruiert die gesuchten injektiven Zuordnungen in drei Schritten.

1. Zuerst werden alle Elemente von N_1 injektiv in R abgebildet. Dies entspricht also der Auswahl einer n_1-elementigen Teilmenge von R.
Die Anzahl von Möglichkeiten ist $\binom{r}{n_1}$.

2. Nun werden die Elemente von N_2 injektiv in R abgebildet. Allerdings dürfen die im Schritt 1 erhaltenen Bildelemente nicht mehr verwendet werden.
Die Anzahl von Möglichkeiten ist also $\binom{r-n_1}{n_2}$.

3. Da die Elemente von N_1 keine gleichen Elemente wie N_2 enthalten, ergibt jede Kombination der Ergebnisse aus Schritt 1 bzw. 2 eine andere Abbildung.

Die Gesamtanzahl von injektiven Zuordnungen ist also, wie bei k-Permutationen, das Produkt $\binom{r}{n_1}\binom{r-n_1}{n_2}$.

Wir bezeichnen diesen Typ als $B2(A2)$-injektiv.

3. Man klassifiziere die Tutoraufgaben 2 und 3.2 von Übungsblatt 10 entsprechend.

Lösung:

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
TA 2.1a:	$anz = 6^4$	A1	$N\{\neq\} = [4]$,	$R\{\neq\} = [6]$
TA 2.1b:	$anz = 126$	B1	$\|N\{=\}\| = 4$,	$R\{\neq\} = [6]$
TA 2.1c:	$anz = 21^2$	B1(A1)	$N = N_1 \uplus N_2$,	$R\{\neq\} = [6]$
			$\|N_1\{=\}\| = 2$,	
			$\|N_2\{=\}\| = 2$,	
TA 2.2 :	$anz = 83160$	B2(A2)	$N = \biguplus N_i$,	$R\{\neq\} = [5]$
			$\|N_1\{=\}\| = 1$,	
			$\|N_2\{=\}\| = 1$,	
			$\|N_3\{=\}\| = 2$,	
			$\|N_4\{=\}\| = 2$,	
			$\|N_5\{=\}\| = 5$,	
TA 3.2 :	$anz(\leq k, \|M\|) = 84$	B3	$\|N\{=\}\| = 3$,	$R\{\neq\} = [6]$

Will man die Anzahl der Multimengen über die Elementezahl bis k aufsummieren, dann fügt man eine weitere Box hinzu, und bestimmt die Anzahl der Multimengen mit k Elementen.

Die Verbindung zu dem surjektiven Abbildungstyp $B3$ stellt man her, indem man alle r Boxen mit zusätzlichen r Bällen auffüllt.

5.2 VA 2

Am Montagabend wählen sich n Studenten auf m Rechnern rayhalle1, rayhalle2 bis rayhalle m ein, um die neuen Übungsaufgaben zu lesen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn darauf geachtet wird,

1. *welcher* Student auf *welchem* Rechner eingeloggt ist,
2. *wie viele* Studenten auf *welchem* Rechner eingeloggt sind,
3. *welche* Studenten *gemeinsam* auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,
4. *wie viele* Studenten *gemeinsam* auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind,

und wie hängen die Antworten jeweils davon ab, ob auf jedem Rechner

- höchstens
- mindestens
- genau

ein Student eingeloggt ist.

Lösung:

Wir bezeichnen die n-elementige Struktur der Studenten mit St_n und die m-elementige Struktur der Rechner mit Rch_m.
Das Einloggen eines Studenten s in einen Rechner r entspricht der Zuordnung $s \to r$.

Wir gehen davon aus, dass diese Zuordnung rechtseindeutig ist, d. h., dass ein Student sich in einem betrachteten Zeitpunkt nur an einem einzigen Rechner einloggen können soll. (Man könnte auch andere Interpretationen untersuchen.)

Dann ist die Aufgabenstellung nichts anderes, als die Frage nach der Klassifizierung X_i von Zuordnungen nach der Tabelle aus VA 1.

Strukturen:

A: St_n und Rch_m sind Mengen, d.h. die Elemente (Studenten bzw. Rechner) sind unterscheidbar.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, „welcher Student auf welchem Rechner eingeloggt ist“.

B: St_n ist eine Multimenge von n gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Elementen und Rch_m ist eine Menge.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, „wie viele Studenten auf welchem Rechner eingeloggt sind“.

C: St_n ist eine Menge von unterscheidbaren Studenten und Rch_m ist eine Multimenge von m gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Rechnern.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, ,,welche Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind".

D: St_n ist eine Multimenge von n gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Studenten, und Rch_m ist eine Multimenge von m gleichen, d. h. nicht unterscheidbaren Rechnern.

Dies entspricht der Bedingung, dass man darauf achtet, ,,wie viele Studenten gemeinsam auf dem gleichen Rechner eingeloggt sind".

Abbildungstypen:

$T1$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig, ansonsten beliebig.

$T2$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig und injektiv.

Dies entspricht der Forderung, dass „höchstens ein Student auf jedem Rechner eingeloggt ist“.

$T3$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig und surjektiv.

Dies entspricht der Forderung, dass „mindestens ein Student auf jedem Rechner eingeloggt ist“.

$T4$: Die Zuordnung ist rechtseindeutig und bijektiv.

Dies entspricht der Forderung, dass „genau ein Student auf jedem Rechner eingeloggt ist“.

Die Anzahl der Zuordnungen unter Beachtung der Bedingung X und des Typs i ergibt sich aus der Tabelle von VA 1.

5.3 VA 3

Wie viele Stellungen gibt es bei dem Spiel TIC TAC TOE nach 4 Zügen (d. h., wenn jeder Spieler zweimal gesetzt hat)?

Der erste Zug sei beliebig.

Lösung:

Nach 4 Spielzügen hat jeder Spieler 2 gleiche Steine gesetzt, und zwar auf je 2 der 9 Felder.

Der Lösungstyp ist also $B2(A2)$-injektiv (siehe VA 1.3).

Für die Anzahl x der möglichen Stellungen gilt folglich

$$x = \binom{9}{2}\binom{7}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 756\,.$$

5.4 VA 4

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Lösung:

In dieser Aufgabe treten erstmalig Nebenbedingungen auf, deren Beachtung vorbereitende Überlegungen erfordern.

9 Züge benötigen minimal 17 Gleise, wenn man sie möglichst dicht aufeinanderfolgen läßt, denn zwischen den Zügen müssen sich mindestens 8 Gleise befinden.

An den 10 Stellen vor oder nach einem Zug können noch 13 freie Gleise eingefügt werden.

Die Verteilung entspricht einer Zuordnung von $n = 13$ nicht unterscheidbaren Gleisen auf $r = 10$ unterscheidbare Stellen.

Dies entspricht der Anzahl von $n = 13$-elementigen Multiteilmengen einer $r = 10$-elementigen Menge.

Für die gesuchte Anzahl x folgt

$$x = \frac{10^{\overline{13}}}{13!} = \binom{22}{13} = \binom{22}{9} = 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 5 = 497420\,.$$