Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 2
11. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 18. Mai 2011, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $W_1 = \langle\Omega, \Pr\rangle$ an mit $\Omega = \mathbb{N}$ und $\Pr[\{1, 2\}] = 1$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels!

2. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $W_2 = \langle\Omega, \Pr\rangle$ an mit $\Omega = \mathbb{N}$, so dass $\Pr[x] \neq 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Spieler A würfelt mit drei üblichen 6-seitigen fairen Würfeln. Er zeigt Spieler B das Ergebnis nicht, sagt aber korrekterweise, dass die Summe der Augenzahlen der drei Würfel 7 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 1 zeigt?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 144\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ durch 3 oder 7 (oder beides) teilbar ist! Die Auswahl aus W sei dabei Laplace-verteilt.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine (Laplace)-zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 144\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ nicht gleichzeitig durch $4, 8$ und 12 teilbar?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir variieren das aus der Vorlesung bekannte „Ziegenproblem“ wie folgt.

Es gibt 10 Türen und hinter 9 Türen ist eine Ziege. Nur hinter einer einzigen Tür befindet sich keine Ziege sondern ein Auto, das der Kandidat gewinnen will. Nachdem der Kandidat die Tür mit Nr. 1 ausgewählt hat, öffnet der Moderator 5 andere Türen, hinter denen jeweils eine Ziege sitzt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Kandidat das Auto, wenn er schließlich eine geschlossene Tür wählt, aber nicht die Tür mit Nr. 1?

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Thema sind unabhängige Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert. Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.

  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. Beweis!

- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i. Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. Beweis!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

Tutoraufgabe 1

Wir wollen mit einem Test feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte infektiöse Krankheit vorliegt, wenn der Test positiv war. Die Krankheit trete bei Menschen mit der Häufigkeit 10^{-5} auf. Bei gesunden Menschen sei der Test mit Wahrscheinlichkeit $0,001$ positiv, bei schon erkrankten Menschen sei der Test in 95% der Fälle positiv.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiv ausgefallenen Test keine Infektion vorliegt?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten das folgende Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf erscheint. Es sei k die Anzahl der dazu ausgeführten Münzwürfe.
- 2. Schritt: Es wird ein fairer 6-seitiger Würfel k-mal geworfen mit Ergebnissen aus der Menge $[6]$.

1. Stellen Sie die Ergebnisse des Experiments entsprechend als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum dar und beweisen Sie, dass Ihre Darstellung korrekt ist, d.h., dass die Definitionsbedingungen eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllt sind.
2. Es sei M_k das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau k-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.
3. Es sei A das Ereignis, dass in den k Würfen des Würfels genau einmal eine 6 geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[A|M_k]$ und $\Pr[A]$.
4. Bestimmen Sie $\Pr[M_k|A]$.

Tutoraufgabe 3

Für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{0,1\}^n$ mit $n \geq 2$ sei $Pr[\omega] = 2^{-n}$. Wir definieren die $n+1$ Ereignisse $A_i := \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega_i = 1\}$ und $B := \{\omega \in \Omega\ ;\ \sum_i \omega_i \text{ ist ungerade}\}$ sowie die Ereignismengen

$$F_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B\}, \qquad F_2 = \{A_1, \ldots, A_n\}, \qquad F_3 = \{A_2, \ldots, A_n, B\}.$$

Welche dieser Mengen sind unabhängig? Beweis!

<u>Hinweis</u>: Nutzen Sie das in Vorbereitungsaufgabe 1 definierte Verfahren.