SS 2011

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/uebung/

6. Mai 2011

ZÜ I

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Ziele der Zentralübung
3. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 1

1. Übungsbetrieb

1.1 Organisation der Zentralübung

- Zeit: Fr 16.00–17:30 Ort: HS1

  Ausnahmen:

  Am 13. Mai entfällt die ZÜ.

  Am 24. Juni entfällt die ZÜ (24. Juni ist Mittelklausur).

  An den Donnerstagen des
  19. Mai, 9. Juni, 30. Juni und 14. Juli
  findet eine ZÜ anstelle der DWT Vorlesung statt.
  Entsprechende Freitagstermine entfallen dann.

- Webseite:

  http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/uebung/

- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Elpost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: im Anschluss an die Zentralübung und n.V.
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie

1.2 Aufgabenstruktur der Übungen

Die Übungsblätter bestehen aus
Aufgaben für Vorbereitung (VA), Aufgaben für Tutorübung (TA) und Hausaufgaben (HA) mit folgender

Zielsetzung:

VA: Vorbereitung der Tutorübungen (inhaltlich parallel zur Vorl.).

TA: Stoff der Gruppenarbeit in der Tutorübung,

HA: Wiederholung und Lernkontrolle (Prüfungsstil).

Bearbeitung:

VA für Eigenstudium und Besprechung in der Zentralübung (ZÜ).
HA werden nicht besprochen, aber korrigiert.

Musterlösungen:
Zu allen Aufgaben der Übungsblätter und Klausur wird es Musterlösungen auf der Übungswebseite geben.

1.3 Persönliche Kommunikation

- Rückkopplung zur Übungsleitung:
  Dr. W. Meixner,
  Elpost: meixner@in.tum.de,
  Büro: MI 03.09.040,
  Sprechstunde: nach Zentralübung und n.V.
- Mitarbeit bei Musterlösungen
- Kontakt mit Tutoren im Arbeitsraum für DWT Teilnehmer
- Kummerkasten: DWT-Briefkästen und Elpost

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: **Spezielle** und **Allgemeine** didaktische Ziele.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor-, Haus- bzw. Prüfungsaufgaben der Übungsblätter bzw. Mittelklausur.
- **Persönliche Kommunikation**:
  - Rückkopplung zu Übungsleitung
  - Antworten auf Kummerkasten (Briefkästen und Elpost)

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Vertiefung der informellen **Metasprache**

Ziel ist aber auch:

Provokation!

Beispiel:

Was ist ein „Ereignis“?

Ist die Zahl 5 ein „Elementarereignis“?

Was meint der Begriff „Zufall“?

3. Vorbereitung auf TA's Blatt 1

Bemerkung: Beachten Sie insbesondere Merkblatt 1!

3.1 VA 1

1. Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von ,,Ereignis", ,,Elementarereignis" oder ,,Ergebnismenge" sprechen.

Antwort:

Die Mengenlehre gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine ,,statische" Welt logisch analysieren.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine
sich verändernde (,,dynamische") Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a.
die Begriffe ,,Ereignis" und ,,Vorgang".

Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“ stets als „Ergebnis“ eines Vorgangs.

Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses, das sein Ergebnis darstellt.

Die logischen Kategorien

Ereignis und Vorgang bedingen sich gegenseitig.

Also:

Die Zahl 5 ist kein Ereignis, sondern Element einer Menge.

Die Zahl 5 stellt aber zusammen mit einem Algorithmus ein (Elementar-)Ereignis dar, das eintreten kann, wenn der Algorithmus den Wert 5 liefert.

Zusammenfassung:

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist auf einer „algorithmischen“ Mengenlehre gegründet.

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch (nicht notwendig deterministische) Algorithmen beschrieben.

In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“.

Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.

Zurück zur Aufgabenstellung von VA 1.1:

Das Ergebnis x eines Vorgangs wird beobachtet oder gemessen. Dabei wird eine Eigenschaft $E(x)$ des Ergebnisses festgestellt formal in der Form $x \in E$, wobei E eine Menge ist.

Das Ereignis wird nun als Menge E beschrieben, wobei E eine Menge von möglichen Ergebnissen ist.

Die Zusammenfassung aller möglichen (Einzel-)Ergebnisse ist die Ergebnismenge.

Jedem Ergebnis x entspricht eine kleinste Menge $E = \{x\}$, so dass $x \in E$ gilt. Diese Menge ist ein Elementarereignis und wird (leider) in der Literatur häufig von x nicht unterschieden.

2. Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

Lösung:

Sei M eine endliche Multimenge.

Dann gibt es eine Menge E und eine Funktion $h : E \to \mathbb{N}_0$,
so dass
jedes Element x' von M ein Vorkommen eines Elementes x von E ist
und
jedes $x \in E$ in M genau $h(x)$ Vorkommen besitzt.

Damit ist $\langle E, \Pr \rangle$ mit $\Pr[x] = \frac{h(x)}{|M|}$ ein diskreter endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

3.2 VA 2

1. ,,Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

Lösung:

Es gibt keinen anderen logischen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Ausführung eines Experiments und der jeweils nächsten Ausführung des Experiments
als denjenigen,
dass wiederholte Ausführungen denselben Annahmen über die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen unterliegen.

Die Aussage ist auch deshalb nicht sinnvoll,
weil Wahrscheinlichkeiten nicht festgestellt werden
(auch nicht auf der Grundlage der Ausführung von Experimenten),
sondern Annahmen über die Natur einer experimentellen Anordnung bzw. eines Algorithmus sind.

Bemerkung:

Dies steht nicht im Widerspruch dazu,
dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu
Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

2. Eine Box enthalte
schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle.

Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

Es sei Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit vorausgesetzt.

Lösung:

Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle in der Box.
Dann enthält die Box $3n$ Bälle.

Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch
$3n - 2$ Bälle in der Box, von denen n Stück schwarz sind.

Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen,
berechnet sich einerseits zu $\frac{n}{3n-2}$
und ist andererseits gegeben durch $\frac{2}{5}$.
Wir Lösen die Gleichung $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$ nach n auf und erhalten $n = 4$.

Antwort: Zu Beginn enthielt die Box 12 Bälle.

3.3 VA 3

1. Geben Sie ein Beispiel
   eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

Lösung:

Seien $\Omega = \{1, 2\}$ und $\Pr[1]=1, \Pr[2]=0$.

Dann ist $W=\langle\Omega, \Pr\rangle$
ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Denn offenbar gilt $0 \leq Pr[e] \leq 1$ für alle $e \in \Omega$
und es gilt $\sum_{e\in\Omega} \Pr[e] = 1$.

2. Sei $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.
Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Lösung:

Aus $\quad 1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$
folgt $\quad \Pr[A \cup B] = 1.$

Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = \Pr[A \cup B] &= \Pr[(A \setminus B) \cup B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

3.4 VA 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}\,, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}\,, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Lösung:

Natürlich werden wir die Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse modellieren.

Dies impliziert zunächst, dass A und B nicht gleichzeitig als Elementarereignisse ω mit $\omega \in \Omega$ modelliert werden können.

Dann nämlich müsste das Ereignis $A \wedge B$ die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, denn Elementarereignisse sind unvereinbar.

Wir definieren die Bezeichnungen

$$o_1 = A \wedge B\,, \quad o_2 = A \wedge \neg B\,, \quad o_3 = \neg A \wedge B\,, \quad o_4 = \neg A \wedge \neg B$$

Da die o_i paarweise widersprüchlich sind und $o_1 \vee o_2 \vee o_3 \vee o_4$ allgemeingültig (tautologisch) ist, setzen wir

$$\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}\,.$$

Die Modellierung der Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zusammen mit der Gleichung $\sum_{1\le i\le 4}\Pr(o_i)=1$ liefert

$$\Pr(o_1)=\frac{1}{6}\,,\qquad \Pr(o_2)=\frac{1}{3}\,,\qquad \Pr(o_3)=\frac{1}{3}\,,\qquad \Pr(o_4)=\frac{1}{6}\,.$$

Wir bemerken, dass gilt

$$\Pr[A]=\Pr[B]=\frac{1}{2}\,.$$