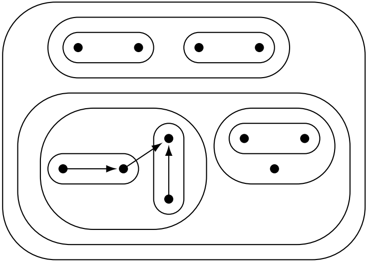
# 8. Union/Find-Datenstrukturen

## 8.1 Motivation

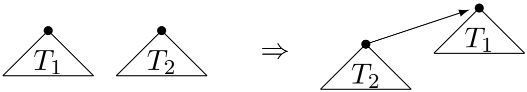


- *Union*($T_1, T_2$): Vereinige $T_1$ und $T_2$
  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$
- *Find*($x$): Finde den Repräsentanten der (größten) Teilmenge, in der sich $x$ gerade befindet.

## 8.2 Union/Find-Datenstruktur

### 8.2.1 Intrees

1. Initialisierung: $x \to \bullet x$: Mache $x$ zur Wurzel eines neuen (einelementigen) Baumes.
2. *Union*$(T_1, T_2)$:




3. *Find*: Suche Wurzel des Baumes, in dem sich $x$ befindet.

**Bemerkung:** Naive Implementation: worst-case-Tiefe $= n$

- Zeit für *Find* $= \Omega(n)$
- Zeit für *Union* $= \mathcal{O}(1)$

## 8.2.2 Gewichtete Union (erste Verbesserung)

Mache die Wurzel des kleineren Baumes zu einem Kind der Wurzel des größeren Baumes. Die Tiefe des Baumes ist dann $\mathcal{O}(\log n)$.

- Zeit für *Find* $= \mathcal{O}(\log n)$
- Zeit für *Union* $= \mathcal{O}(1)$

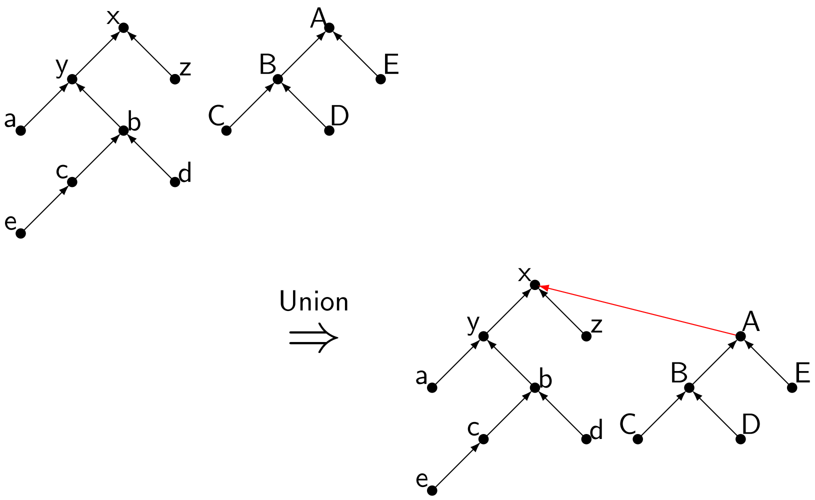
Es gilt auch: Tiefe des Baumes im worst-case:

$$\boxed{\Omega(\log n)}$$

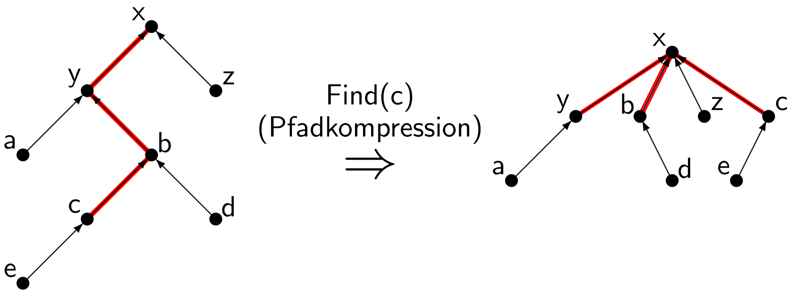
## 8.2.3 Pfad-Kompression mit gewichteter Union (zweite Verbesserung)

Wir betrachten eine Folge von $k$ *Find*- und *Union*-Operationen auf einer Menge mit $n$ Elementen, darunter $n - 1$ *Union*.

**Implementierung:** Gewichtete *Union* für Pfad-Kompression:



**Implementierung:** *Find* für Pfad-Kompression:



**Bemerkung:**
Nach Definition ist

$$\log^* n = \min\{i \geq 0; \underbrace{\log\log\log\ldots\log n}_{i\ \log\text{'s}} \leq 1\}$$

## Beispiel 73

$$\begin{aligned}
\log^* 0 = \log^* 1 &= 0 \\
\log^* 2 &= 1 \\
\log^* 3 &= 2 \\
\log^* 16 &= 3 && \text{da } 16 = 2^{2^2} \\
\log^* 2^{65536} &= 5 && \text{da } 2^{65536} = 2^{2^{2^{2^2}}}
\end{aligned}$$

## Satz 74

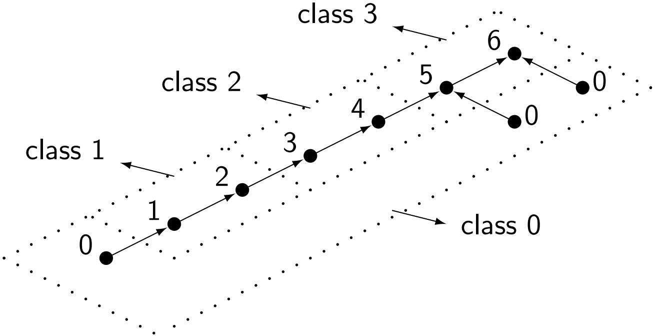
*Bei der obigen Implementierung ergibt sich eine amortisierte Komplexität von $\mathcal{O}(\log^* n)$ pro Operation.*

## Beweis:

Sei $T'$ der (endgültige) In-Baum, der durch die Folge der *Union*'s, ohne die *Find*'s, entstehen würde (also keine Pfad-Kompression).
Ordne jedem Element $x$ drei Werte zu:

- rank($x$):= Höhe des Unterbaums in $T'$ mit Wurzel $x$
- class($x$):= $\begin{cases} i \geq 1 & \text{falls } a_{i-1} < \text{ rank}(x) \leq a_i \text{ ist } (i \geq 1) \\ 0 & \text{falls rank}(x) = 0 \end{cases}$

  Dabei gilt: $a_0 = 0, a_i = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \Big\}i\ 2'\text{en}$ für $i \geq 1$.
  Setze zusätzlich $a_{-1} := -1$.


class 3
class 2
class 1
class 0
6
5
4
3
2
1
0
0
0

## Beweis (Forts.):

- dist($x$) ist die Distanz von $x$ zu einem Vorfahr $y$ im momentanen Union/Find-Baum (mit Pfad-Kompression), so dass class($y$) $>$ class($x$) bzw. $y$ die Wurzel des Baumes ist.

Definiere die Potenzialfunktion

$$\text{Potenzial} := c \sum_x \text{dist}(x), \quad c \text{ eine geeignete Konstante } > 0$$

## Beweis (Forts.):

**Beobachtungen:**

i) Sei $T$ ein Baum in der aktuellen Union/Find-Struktur (mit Pfad-Kompression), seien $x, y$ Knoten in $T$, $y$ Vater von $x$. Dann ist class($x$) $\leq$ class($y$).

ii) Aufeinander folgende *Find($x$)* durchlaufen (bis auf eine) verschiedene Kanten. Diese Kanten sind (im wesentlichen) eine Teilfolge der Kanten in $T'$ auf dem Pfad von $x$ zur Wurzel.

## Beweis (Forts.):

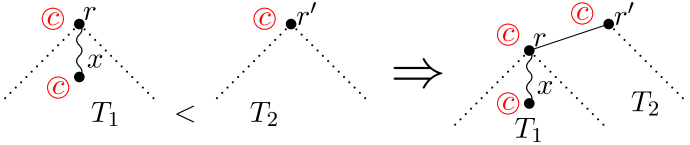
**Amortisierte Kosten Find($x$):**
Sei $x_0 \to x_1 \to x_2 \ldots x_k = r$ der Pfad von $x_0$ zur Wurzel. Es gibt höchstens $\log^* n$-Kanten $(x_{i-1}, x_i)$ mit class($x_{i-1}$) $<$ class($x_i$). Ist class($x_{i-1}$) $=$ class($x_i$) und $i < k$ (also $x_i \neq r$), dann ist dist($x_{i-1}$) vor der *Find($x$)*-Operation $\geq 2$, nachher gleich 1.

Damit können die Kosten für alle Kanten $(x_{i-1}, x_i)$ mit class($x_{i-1}$) $=$ class($x_i$) aus der Potenzialverringerung bezahlt werden. Es ergeben sich damit amortisierte Kosten

$$\boxed{\mathcal{O}(\log^* n)}$$

# Beweis (Forts.):

**Amortisierte Gesamtkosten aller $(n-1)$-Union's:**




Die gesamte Potenzialerhöhung durch alle *Union*'s ist nach oben durch das Potenzial von $T'$ beschränkt (Beobachtung ii).

## Beweis (Forts.):

$$\begin{aligned}
\mathsf{Potenzial}(T') &\le c \cdot \sum_{i=0}^{\log^* n} \sum_{\mathsf{rank}(x)=j=a_{i-1}+1}^{a_i} \mathsf{dist}(x) \\
&\le c \cdot \sum_{i=0}^{\log^* n} \sum_{\mathsf{rank}(x)=j=a_{i-1}+1}^{a_i} \frac{n}{2^j} a_i \\
&\le c \cdot n \sum_{i=0}^{\log^* n} a_i \frac{1}{2^{a_{i-1}}} = c \cdot n \sum_{i=0}^{\log^* n} 1 \\
&= \mathcal{O}(n \log^* n)\,.
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung ergibt sich, da alle Unterbäume, deren Wurzel $x$ $\mathsf{rank}(x) = j$ hat, disjunkt sind und jeweils $\ge 2^j$ Knoten enthalten. □

## 8.2.4 Erweiterungen

1) Bessere obere Schranke $\alpha(k, n), k \geq n$. Betrachte die (Variante der) Ackermannfunktion $A(m, n)$ mit:

$$
\begin{aligned}
A(0, n) &= 2n; & n \geq 0 \\
A(m, 0) &= 2; & m \geq 1 \\
A(m+1, n+1) &= A(m, A(m+1, n)) &
\end{aligned}
$$

$n \longrightarrow$

| $m \downarrow$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ | $8$ |
| | $2$ | $4$ | $8$ | $16$ | $32$ |
| | $2$ | $8$ | $2^9$ | | |
| | $2$ | | | | |
| | $2$ | | | | |
| | $\vdots$ | | | | |

Die Ackermannfunktion $A(\cdot, \cdot)$ steigt asymptotisch schneller als jede primitiv-rekursive Funktion.

## Definition 75

Die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen (auf den natürlichen Zahlen) ist induktiv wie folgt definiert:

1. Alle konstanten Funktionen sind primitiv-rekursiv.
2. Alle Projektionen sind primitiv-rekursiv.
3. Die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen ist primitiv-rekursiv.
4. Jede Funktion, die durch Komposition von primitiv-rekursiven Funktionen entsteht, ist primitiv-rekursiv.
5. Jede Funktion, die durch sog. primitive Rekursion aus primitiv-rekursiven Funktionen entsteht, ist primitiv-rekursiv. Primitive Rekursion bedeutet folgendes Schema für die Definition von $f$:
$$f(0, \cdots) = g(\cdots)$$
$$f(n+1, \cdots) = h(f(n, \cdots), \cdots)$$
wobei $g, h$ bereits primitiv-rekursive Funktionen sind.

Weiter wird gesetzt:

$$\alpha(k,n) := \min\{i \geq 1; A(i, \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor) > \log n\}$$

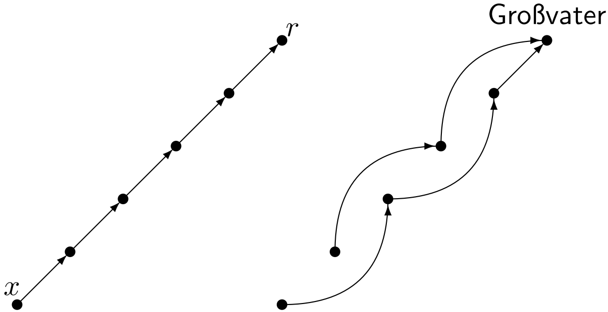
Dann gilt: Der Zeitbedarf für eine Folge von $k$ *Find*- und *Union*-Operationen auf einer Menge mit $n$ Elementen, darunter $n-1$ *Union*, ist

$$\mathcal{O}(k\alpha(k,n)) .$$

Es gilt auch eine entsprechende untere Schranke.

Robert E. Tarjan:
*Data Structures and Network Algorithms*
SIAM CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Bd. 44 (1983)

2) Variante der Pfadkompression:




Diese Variante der Pfadhalbierung erfüllt ebenfalls die $\mathcal{O}(k\alpha(k,n))$ Schranke.