

## 6. Wachstumsverhalten von Funktionen

$f, g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_+$ .

- $g = \mathcal{O}(f)$  [auch:  $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$  oder  $g \in \mathcal{O}(f)$ ] gdw.

$$(\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0) [g(n) \leq c \cdot f(n)]$$

- $g = \Omega(f)$  [auch:  $g(n) = \Omega(f(n))$  oder  $g \in \Omega(f)$ ] gdw.

$$(\exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0) [g(n) \geq c \cdot f(n)]$$

- $g = \Theta(f)$  gdw.  $g = \mathcal{O}(f)$  und  $g = \Omega(f)$

$f, g$  seien Funktionen von  $\mathbb{N}_0$  nach  $\mathbb{R}_+$ .

- $g = o(f)$  gdw.

$$(\forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0) [g(n) \leq c \cdot f(n)]$$

- $g = \omega(f)$  gdw.

$$(\forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_0) [g(n) \geq c \cdot f(n)]$$

- $g = \Omega_\infty(f)$  gdw.

$$(\exists c > 0) [g(n) \geq c \cdot f(n) \text{ f\"ur unendlich viele } n]$$

- $g = \omega_\infty(f)$  gdw.

$$(\forall c > 0) [g(n) \geq c \cdot f(n) \text{ f\"ur unendlich viele } n]$$

## Beispiel 3

- $n^3$  ist nicht  $\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$ .
- $n^3 + n^2$  ist nicht  $\omega(n^3)$ .
- $100n^3$  ist nicht  $\omega(n^3)$ .

### Bemerkung:

Die **Groß-O-Notation** wurde von **D. E. Knuth** in der Algorithmenanalyse eingeführt, siehe z.B.



**Donald E. Knuth:**

*Big omicron and big omega and big theta.*

**SIGACT News 8(2)**, pp. 18–24, **ACM SIGACT**, 1976

Sie wurde ursprünglich von **Paul Bachmann** (1837–1920) entwickelt und von **Edmund Landau** (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

	Problemgröße $n$					
Wachstumsrate	10	20	30	40	50	60
$n$	.00001 Sekunden	.00002 Sekunden	.00003 Sekunden	.00004 Sekunden	.00005 Sekunden	.00006 Sekunden
$n^2$	.0001 Sekunden	.0004 Sekunden	.0009 Sekunden	.0016 Sekunden	.0025 Sekunden	.0036 Sekunden
$n^3$	.001 Sekunden	.008 Sekunden	.027 Sekunden	.064 Sekunden	.125 Sekunden	.216 Sekunden
$n^5$	.1 Sekunden	3.2 Sekunden	24.3 Sekunden	1.7 Minuten	5.2 Minuten	13.0 Minuten
$2^n$	.001 Sekunden	1.0 Sekunden	17.9 Minuten	12.7 Tage	35.7 Jahre	366 Jahrhdte
$5^n$	.059 Sekunden	58 Minuten	6.5 Jahre	3855 Jahrhdte	$2 \times 10^8$ Jahrhdte	$1.3 \times 10^{13}$ Jahrhdte

## 7. Rekursionsgleichungen

### Beispiel 4 (Mergesort)

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \\&= cn + 2T\left(\frac{n}{2}\right) \\&= cn + 2\left(c\frac{n}{2} + 2T\left(\frac{n}{4}\right)\right) \\&= cn + cn + 4T\left(\frac{n}{4}\right) \\&\approx cn \log_2 n \text{ (nur genau für Zweierpotenzen)}\end{aligned}$$

## Methoden zur Lösung von Rekursionsgleichungen

- 1 Multiplikatorenmethode
- 2 Lineare homogene Rekursionsgleichungen können mit Hilfe des **charakteristischen Polynoms** gelöst werden
- 3 Umwandlung inhomogener Rekursionsgleichungen in homogene
- 4 Erzeugendenfunktionen
- 5 Transformation des Definitions- bzw. Wertebereichs
- 6 ...

Es gibt **keinen** vollständigen Satz von Methoden.



Durch Addieren aller Gleichungen erhalten wir:

$$f_n = 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i (n - i) = \underbrace{2^{n-1}}_{(1)} + n \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} 2^i}_{(2)} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} i \cdot 2^i}_{(3)}$$

Term (2) (geometrische Reihe):

$$n \sum_{i=0}^{n-2} 2^i = n(2^{n-1} - 1)$$



Term (3) (mit der Substitution  $n - 2 = k$  und  $x$  für 2):

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^k ix^i &= \sum_{i=1}^k ix^i = x \sum_{i=1}^k ix^{i-1} \\ &= x \sum_{i=1}^k \frac{dx^i}{dx} = x \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^k x^i \\ &= x \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \right) \\ &= \frac{kx^{k+2} - x^{k+1}(k+1) + x}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Einsetzen von  $k = n - 2$  und  $x = 2$  ergibt:

$$\sum_{i=0}^{n-2} i2^i = 2^n(n-2) - 2^{n-1}(n-1) + 2 = 2^n n - 2^{n+1} - 2^{n-1}n + 2^{n-1} + 2$$

(2) – (3):

$$\begin{aligned}n \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - \sum_{i=0}^{n-2} i2^i &= n \cdot (2^{n-1} - 1) - 2^n(n-2) + 2^{n-1}(n-1) - 2 \\ &= 2^{n-1}(2n-1) - 2^n(n-2) - n - 2\end{aligned}$$

und schließlich (1) + (2) – (3):

$$\begin{aligned}2^{n-1} + n \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - \sum_{i=0}^{n-2} i2^i &= 2^{n-1}(1 + 2n - 1) - 2^n(n-2) - n - 2 \\ &= 2^{n+1} - n - 2\end{aligned}$$

## 7.2 Charakteristisches Polynom

Sei

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2 .$$

Es handelt sich hier um eine **lineare homogene Rekursionsgleichung zweiter Ordnung**.

Ansatz:  $f_n := a^n$  für ein unbekanntes  $a$ .

Dann muss gelten:  $a^n - a^{n-1} - a^{n-2} = 0$ . Da hier  $a \neq 0$ :

$$a^2 - a - 1 = 0; \text{ also } a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Falls  $f_n = a_1^n$  und  $f_n = a_2^n$  Lösungen der Rekursionsgleichung sind, dann auch  $f_n = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n$ , für beliebige Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ .

$f_1 = 1$  und  $f_0 = 0$  liefern zwei Gleichungen für  $c_1$  und  $c_2$ , mit der Lösung:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

## Satz 5

Sei  $p(x)$  das charakteristische Polynom zur (linearen homogenen) Rekursionsgleichung

$$p_0 f_n + p_1 f_{n-1} + \cdots + p_k f_{n-k} = 0 \quad (1)$$

mit den konstanten Koeffizienten  $p_i$ . Seien  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  die (i.a. komplexen) Wurzeln von  $p(x)$ , jeweils mit Vielfachheit  $m_i$ . Dann ist die allgemeine Lösung der Rekursionsgleichung (1) gegeben durch

$$f_n = \sum_{i=1}^m \left( r_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j \right),$$

mit Konstanten  $c_{ij}$ .

### 7.3 Erzeugendenfunktionen

Für lineare und nicht lineare Rekursionsgleichungen erhält man oft eine Lösung, indem man die  $f_n$  als Koeffizienten einer Potenzreihe betrachtet und eine geschlossene Form der dadurch definierten Funktion sucht.

#### Definition 6 (Erzeugendenfunktion)

Sei die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  gegeben. Die zugehörige

- (gewöhnliche) Erzeugendenfunktion ist

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n; \quad z \in \mathbb{C};$$

- exponentielle Erzeugendenfunktion ist

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{n!} z^n; \quad z \in \mathbb{C}.$$

## Beispiel 7

- ① Die Erzeugendenfunktion der Folge  $(1, 0, 0, \dots)$  ist

$$F(z) = 1.$$

- ② Die Erzeugendenfunktion der konstanten Folge  $(1, 1, 1, \dots)$  ist

$$F(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Falls  $F(z) = \sum_{n>0} f_n z^n$ , bezeichnet

$$[z^n]F(z)$$

den  $n$ -ten Koeffizienten  $f_n$ .



Sei  $F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  und  $G(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n$ .

ErzFkt.	n-tes Folgenglied	Anmerkungen:
$cF$	$cf_n$	
$F + G$	$f_n + g_n$	
$F \cdot G$	$h_n := \sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}$ (Konvolution)	$\left( \sum_{i \geq 0} f_i z^i \right) \left( \sum_{i \geq 0} g_i z^i \right) = \sum_{i \geq 0} h_i z^i$ (mit $h_n = \sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}$ )
$z^k F$	<u>if</u> $n < k$ <u>then</u> 0 <u>else</u> $f_{n-k}$ <u>fi</u>	
$\frac{F(z)}{1-z}$	$\sum_{i=0}^n f_i$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$
$z \frac{dF(z)}{dz}$	$nf_n$	
$\int_0^x F(t) dt$	<u>if</u> $n = 0$ <u>then</u> 0 <u>else</u> $\frac{f_{n-1}}{n}$ <u>fi</u>	$f_n z^n$ geht über auf $f_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$
$F(cz)$	$c^n f_n$	$F(cz) = \sum_{n \geq 0} f_n c^n z^n$

## Beispiel 8

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1 - 2z}$$

$$G(z) := \sum_{n \geq 0} n z^n = \frac{z}{(1 - z)^2}$$

$$\Rightarrow F(z)G(z) = \frac{z}{(1 - z)^2(1 - 2z)} = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n (n - i) 2^i z^n$$

## Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{z}{(1-z)^2(1-2z)} &= \overbrace{\frac{-2}{(1-z)}}^{(1)} + \frac{-z}{(1-z)^2} + \overbrace{\frac{2}{1-2z}}^{(2)} \\ &= \underbrace{\sum_{n \geq 0} 2^{n+1} z^n}_{(2)} - \sum_{n \geq 0} n z^n - 2 \underbrace{\sum_{n \geq 0} z^n}_{(1)} ;\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n 2^i (n-i) &= [z^n](FG)(z) \\ &= [z^n] \left( \sum_{n \geq 0} (2^{n+1} - n - 2) z^n \right) \\ &= 2^{n+1} - n - 2 .\end{aligned}$$