
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 9. November 2010, 10 Uhr in die DS Briefkästen

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. $\log_{10} 5$ ist keine rationale Zahl (d. h. $\log_{10} 5 \notin \mathbb{Q}$).
2. Zu jeder positiven rationalen Zahl y (i. Z. $y \in \mathbb{Q}^+$), gibt es eine reelle Zahl x (i. Z. $x \in \mathbb{R}$), so dass $\log_{10} x = y$ gilt.

Die Aussagen der Vorbereitungsaufgabe 1 dürfen benutzt werden.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Für beliebige Mengen A , B und C gilt die Gleichung

$$(B \cap (A \cup C)) \cup (A \cup B) = A \cup B.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei die Menge (das Alphabet) $\Sigma = \{d, e, f\}$ mit Zeichen d , e und f gegeben, und es sei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ . Untersuchen Sie die Teilwortrelation $\sqsubseteq \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* ; (\exists y_1, y_2 \in \Sigma^*) [y = y_1 x y_2]\}.$$

Dabei bedeutet $y_1 x y_2$ das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter y_1 , x und y_2 entsteht. Es gilt beispielsweise $ed \sqsubseteq ffdede$, aber $fe \not\sqsubseteq ffdede$. Beachten Sie, dass Σ^* auch das sogenannte leere Wort ε enthält, das als das Wort ohne Buchstaben definiert ist.

1. Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf \sqsubseteq zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.
2. Sei $B := \{x \in \Sigma^* ; x \sqsubseteq dedf\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq \cap (B \times B)$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Tourist in einem bayrischen Dorf kommt zu einer Weggabelung. Der Tourist weiß nicht, welcher der beiden Zweige der Gabelung zu einem Gasthof führt, zu dem er gelangen möchte. Er weiß aber, dass die Einheimischen entweder stets lügen oder stets die Wahrheit sagen. Glücklicherweise steht an der Gabelung ein Einheimischer, der den Weg zum Gasthof kennt.

Welche Frage muss der Tourist an den Einheimischen stellen, um aus dessen Antwort den richtigen Weg zu erfahren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz p^q . Die daraus abgeleitete Funktion x^a nennt man Potenzfunktion, und die Funktion a^x Exponentialfunktion mit dem Spezialfall e^x . Die Umkehrung von a^x führt auf die Logarithmusfunktion $\log_a x$.

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit $\log_b x$ bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige positive Basen gelten, so schreibt man häufig $\log x$. Die Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}.$$

Für $b = e$ bzw. $b = 10$ bzw. $b = 2$ schreiben wir $\ln x$ bzw. $\lg x$ bzw. $\text{ld } x$.

Im Folgenden setzen wir die grundlegenden Eigenschaften der Logarithmus- bzw. Exponentialfunktion als bekannt voraus, also z. B. $0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $e^0 = 1 < e^z$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^+$, sowie die Stetigkeit der Funktionen.

1. Geben Sie einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n},$$

wobei $0 < a$, $0 < b$, $0 < c$ bzw. $0 < n$ vorausgesetzt wird.

2. Sei $a > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = a \cdot e^x$ für alle $0 < a \in \mathbb{R}$ bijektiv ist und für $a = 1$ ein Isomorphismus von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^+ ist bezüglich der Addition von reellen Zahlen und der Multiplikation von positiven reellen Zahlen.

Vorbereitung 2

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, so dass F und $\neg F$ erfüllbar ist!
2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!

Vorbereitung 3

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen x, y, z als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y).$$

Tutoraufgabe 1

Seien p, q, r Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Zeigen Sie, dass $\neg p \vee q \neg$ keine Aussagenlogische Formel ist.
2. Wie viele boolesche Funktionen $f(p, q)$ gibt es, so dass der Ausdruck $f(\text{true}, q)$ für alle Belegungen stets wahr ist?
3. Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r).$$

Tutoraufgabe 2

Seien q, r, s Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax. Die aussagenlogischen Formeln F und G seien gegeben durch

$$F = (q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s) \quad \text{und} \quad G = ((q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)) \Leftrightarrow (q \vee (r \Leftrightarrow s)).$$

1. Zeigen Sie, dass F und $\neg F$ erfüllbare Formeln sind.
2. Bestimmen Sie die Semantik von G . Zeigen Sie, dass F und G semantisch nicht äquivalent sind, d. h. $F \not\equiv G$.
3. Zeigen Sie, dass $\neg G$ ein Widerspruch ist. Was bedeutet dies für G ?

Tutoraufgabe 3

Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem allgemeinen Venn-Diagramm für drei Mengen A, B und C einerseits und andererseits der Menge der Vollkonjunktionen für drei Aussagenvariablen p, q, r ?