

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
.....	<input type="checkbox"/> Diplom <input type="checkbox"/> Inform. <input type="checkbox"/> Bachelor <input type="checkbox"/> BioInf. <input type="checkbox"/> Lehramt <input type="checkbox"/> WirtInf.
Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
.....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von bis / von bis

Vorzeitig abgegeben um

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ	Korrektor
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt eine Funktion $f(n)$ mit $n \in o(f(n))$ und $f(n) \in o(n^2)$.
 2. Falls F und $\neg F$ erfüllbare aussagenlogische Formeln sind, dann ist $F \wedge \neg F$ erfüllbar.
 3. Es gibt keine endliche Untergruppe der additiven Gruppe \mathbb{Z} der ganzen Zahlen außer der trivialen, von $\{0\}$ erzeugten Untergruppe.
 4. Die Abbildung $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ besitzt als Element der Symmetrischen Gruppe S_6 die Ordnung 4.
 5. $(-13) \bmod 7 = 6$.
 6. Die Mathematiker Leonhard Euler und Pierre de Fermat sind sich in Paris begegnet.
-

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir bezeichnen den folgenden aussagenlogischen Ausdruck mit F :

$$p \equiv (q \Rightarrow \neg r).$$

1. Bestimmen Sie die Semantik von F als boolesche Funktion (Wahrheitsfunktion) $F(p, q, r)$ durch Angabe der Wahrheitstabelle.
Bezeichnen Sie die Wahrheitswerte „wahr“ bzw. „falsch“ mit 1 bzw. 0.
 2. Konstruieren Sie eine zu F äquivalente Darstellung in konjunktiver Normalform.
-

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Für jede binäre Relation R über M definieren wir die Eigenschaft von R , eine *Autorität x zu enthalten*, wie folgt:

$$(\exists x \in M \forall y \in M) [(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R]. \quad (1)$$

1. Geben Sie eine Relation R über M an, die die Formel (1) wahr macht.
 2. Wir bezeichnen die Formel (1) mit E . Geben Sie eine pränex-prädikatenlogische Formel an, die äquivalent ist zu $\neg E$.
 3. Geben Sie eine Relation Q über M an, so dass $\neg E$ gilt, d.h., dass die Relation Q keine Autorität x enthält.
 4. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweis, dass für jede transitive Relation R über M die Formel (1) wahr ist.
-

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Aussage:

Für alle $n \geq 2$ und positiven reellen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mit $a_i < 1$ gilt

$$(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot \dots \cdot (1 - a_n) < 1 - (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n).$$

Sie dürfen die Produktschreibweise $\prod_{i=1}^n a_i$ bzw. $\prod_{i=1}^n (1 - a_i)$ für $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ bzw. $(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot \dots \cdot (1 - a_n)$ benutzen.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Wir betrachten 4-elementige Gruppen $G = \langle S, \circ, e \rangle$ mit Trägermenge $S = \{e, a, b, c\}$ und Einselement e , die nicht zyklisch sind.

1. Zeigen Sie, dass für alle Elemente $x \in S$ die Gleichung $x^2 = e$ gilt.
 2. Leiten Sie eine Verknüpfungstafel für \circ her.
Wie viele Verknüpfungstafeln für \circ gibt es?
 3. Begründen Sie, warum jede Gruppe mit 4 Elementen kommutativ sein muss.
-

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Wir betrachten die multiplikative Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{1000}^*, \cdot_{1000}, 1 \rangle$ mit $\mathbb{Z}_{1000}^* = \{x \in \mathbb{N}; x < 1000 \text{ und } \text{ggT}(1000, x) = 1\}$.

1. Führen Sie den Euklidischen Algorithmus aus, um den größten gemeinsamen Teiler von 1000 und 69 zu berechnen. Protokollieren Sie die Berechnungsschritte.
2. Berechnen Sie auf der Grundlage Ihres Protokolls der Berechnung des $\text{ggT}(1000, 69)$ Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass gilt

$$a \cdot 1000 + b \cdot 69 = \text{ggT}(1000, 69).$$

3. Es gilt $69 \in \mathbb{Z}_{1000}^*$. Bestimmen Sie in der multiplikativen Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{1000}^*, \cdot_{1000}, 1 \rangle$ das Inverse $(69)^{-1}$ von 69.
-