- $V_3 = V_4$: Sei
$$\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_3.$$
Zu zeigen ist, dass
$$\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_4.$$
Es gilt, dass
$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} \qquad \deg\big(g_i(z)\big) < d_i\ .$$
Aus Satz 222 (5) (Folie 6) wissen wir, dass
$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n.$$

Damit gilt, dass

$$\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0} \binom{d_i+n-1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} \binom{d_i+n-1}{n} \cdot {\alpha_i}^n z^n\ .$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \ldots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}\cdot\binom{d_i+n-j-1}{n-j}\cdot {\alpha_i}^{n-j}\right)\cdot z^n$$

Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1} {\alpha_i}^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}}_{p_i(n)} \cdot {\alpha_i}^n \right) \cdot z^n$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n \,.$$

Es gilt, dass $\deg\big(p_i(n)\big) \leq d_i - 1$, und damit ist auch $\big(f_n\big)_{n\geq 0} \in V_4$, also $V_3 = V_4$. □

Anwendung: Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

1. Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist $F_n = 0$ für $n < 0$. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt auch für $n = 0$, aber für $n = 1$ ist $F_1 = 1$, die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$
mit
$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von z entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\
&= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z
\end{aligned}$$

3. Löse die Gleichung in $F(z)$. Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

4. Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir $1 - z - z^2$ in der Form $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten a und b, so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z}\ .$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
F(z) &= z\left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}\right)\\
&= z\left(a\sum_{n\ge 0}\alpha^n z^n + b\sum_{n\ge 0}\beta^n z^n\right)\\
&= \sum_{n\ge 1}(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1})z^n
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
F_n &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),
\end{aligned}
$$

nachdem man die Konstanten a und b etwa aus den Gleichungen für F_0 und F_1 bestimmt hat.

4.12 Das Master-Theorem

Bei der Analyse von Divide-and-Conquer-Verfahren stößt man oft auf Rekursionen, die sich nicht als lineare Rekursionen formulieren lassen. So führt der Mergesort-Algorithmus in der Standardvariante zu der Rekursionsgleichung

$$C_n = C_{\lfloor n/2 \rfloor} + C_{\lceil n/2 \rceil} + n \quad \text{für alle } n > 1 \qquad \text{und} \quad C_1 = 0.$$

Löst man allgemein ein Problem der Größe n dadurch, dass man es in a Teilprobleme der Größe höchstens n/b aufteilt, so erhält man für die Laufzeit $T(n)$ eine Rekursion der Form

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)\ ,$$

wobei $f(n)$ die Laufzeit für die Aufteilung in Teilprobleme und für das Zusammenfügen der Lösungen der Teilprobleme ist.

Satz 227 (Master-Theorem)

Seien $a \in \mathbb{N}$, $b > 1$ und $C \geq 0$ Konstanten, und sei $f(n)$ eine nichtnegative Funktion. Weiter seien $c_1(n), \ldots, c_a(n)$ Funktionen mit $|c_i(n)| \leq C$ für alle $1 \leq i \leq a$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Ist dann $T(n)$ eine Funktion, die für $n = 1$ gleich 0 ist und die für $n \geq 1$ die Rekursionsgleichung

$$T(n) = T(n/b + c_1(n)) + \cdots + T(n/b + c_a(n)) + f(n)$$

erfüllt, dann gilt

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \textit{falls } f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \textit{ für ein } \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\log_b a} \log n), & \textit{falls } f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^\delta n) \textit{ f. } \delta > 0, \\ \Theta(f(n)), & \textit{falls } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \textit{ für ein } \epsilon > 0. \end{cases}$$

Für den Beweis des Master-Theorems verweisen wir auf die Literatur, z.B. in:

Verma, Rakesh M.:
A general method and a master theorem for divide-and-conquer recurrences with applications.
J. Algorithms **16**(1), pp. 67–79, 1994

Roura, Salvador:
An improved master theorem for divide-and-conquer recurrences.
Proceedings of the 24th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, ICALP'97 (Bologna, Italy, July 7–11, 1997). LNCS **1256**, pp. 449–459, 1997

Satz 228 (“Baby-Version” des MT)

Wenn die Funktion T für $x < 1$ gleich 0 ist und wenn für $x \geq 1$ die Rekursion

$$T(x) = aT\left(x/b\right) + x$$

gilt (also $T(1) = 1$), dann gilt für $n = b^t$ eine ganzzahlige Potenz von b:

$$T(n) = (1 + o(1)) \cdot \begin{cases} \frac{b}{b-a} n, & \text{falls } a < b, \\ n \log_b n, & \text{falls } a = b, \\ \frac{a}{a-b} n^{\log_b a}, & \text{falls } a > b\ . \end{cases}$$

Beweis:

Zuerst wenden wir die Rekursionsgleichung so oft an, bis wir die Anfangsbedingung erreichen. Wir haben also

$$\begin{aligned} T(n) &= n + aT(n/b) \\ &= n + a\frac{n}{b} + a^2T(n/b^2) \\ &= n + a\frac{n}{b} + a^2\frac{n}{b^2} + a^3T(n/b^3) \\ &= \cdots \\ &= n + a\frac{n}{b} + a^2\frac{n}{b^2} + \cdots + a^tT(n/b^t), \end{aligned}$$

wobei $t = \log_b n$. Also

$$T(n) = n\left(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^t}{b^t}\right)$$

Beweis (Forts.):

Fallunterscheidung:

$a < b$: In diesem Fall konvergiert die Summe und wir erhalten:

$$T(n) \leq n \sum_{k \geq 0} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{b}{b-a} n \; .$$

$a = b$: In diesem Fall ist die Lösung

$$T(n) = n \left(\log_b n + 1\right) = (1 + o(1)) \cdot n \log_b n \; .$$

Beweis (Forts.):

$a > b$: Wir erhalten:

$$\begin{aligned} T(n) &= n\left(\frac{a}{b}\right)^t \left(1 + \frac{b}{a} + \cdots + \frac{b^t}{a^t}\right) \\ &\le n\frac{a}{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)^t \\ &= \frac{a}{a-b}a^{\log_b n} \\ &= \frac{a}{a-b}n^{\log_b a}\ , \end{aligned}$$

da $t = \log_b n$. $\square$

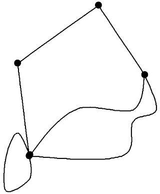
Kapitel IV Graphen und Algorithmen

1. Grundlagen

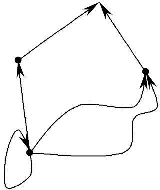
Definition 229

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Knoten (aka Ecken, engl. vertex, vertices) und einer (Mehrfach-)Menge $E \subseteq V \times V$ von Paaren $(u, v) \in V \times V$, genannt Kanten (engl. edges).

Ein Graph heißt ungerichteter Graph, falls für alle $(u, v) \in E$ auch $(v, u) \in E$ ist. Man schreibt dann E auch als Menge von ungeordneten Paaren $\{u, v\}$ von Kanten.



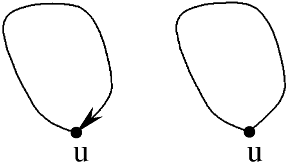
Ein Graph heißt ein gerichteter Graph, falls E (wie in obiger Definition) eine Menge von geordneten Paaren (u, v) ist.



1.1 Schlingen

Definition 230

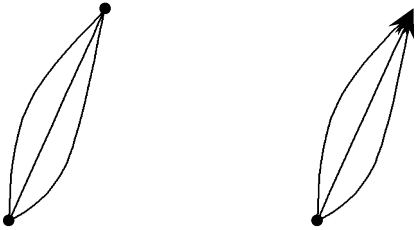
Eine Schlinge ist eine Kante der Form (u, u) bzw. $\{u, u\}$.



1.2 Mehrfachkanten

Definition 231

Ist E eine Multimenge (d. h. Kanten treten mit Vielfachheit auf), sind die Kanten mit Vielfachheit 2 oder größer Mehrfachkanten.



Ein Graph, der Mehrfachkanten enthält, heißt auch Multigraph.

1.3 Einfache Graphen

Definition 232

Ein Graph heißt einfach, falls er keine Schlingen oder Mehrfachkanten enthält.

Definition 233

Ein Graph $G = (V, E)$ $(=: K_n)$ mit $|V| = n$ Knoten heißt vollständig (der vollständige Graph mit n Knoten), falls $E = \{\{u, v\}; u, v \in V, u \neq v\}$ bzw. $E = \{(u, v); u, v \in V, u \neq v\}$.

Beispiel 234