

## 4.6 Abzählen von Permutationen

### 4.6.1 Stirling-Zahlen der ersten Art

#### Definition 172

Die **Stirling-Zahl der ersten Art**

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen  $\in S_n$  mit genau  $k$  Zyklen an.

#### Einfache Beobachtungen:

- 1 für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^n s_{n,k} = n!$$

2

$$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3

$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4

$$s_{n,n} = 1$$

5

$$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

## 4.6.2 Typ einer Permutation

### Definition 173

Sei  $\pi$  eine Permutation von  $n$  Objekten,  $b_i(\pi)$  die Anzahl der Zyklen von  $\pi$  der Länge  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $b(\pi)$  die Anzahl der Zyklen von  $\pi$ , also

$$\sum_{i=1}^n i \cdot b_i(\pi) = n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \dots n^{b_n(\pi)}$$

der **Typ von  $\pi$**  (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).

## Beispiel 174

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1\ 8\ 3)$$

*als Funktionswerte*

$$= (1\ 4\ 2\ 5\ 7\ 8\ 3\ 6)$$

*in Zykelschreibweise*

Typ:  $8^1$

## Beispiel 175

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 7\ 1\ 6\ 5\ 3\ 8)$$

$$= (1\ 2\ 4)\ (3\ 7)\ (5\ 6)\ (8)$$

Typ:  $1^1\ 2^2\ 3^1$

## Lemma 176

*Es gibt*

$$\sum_{k=1}^n P_{n,k}$$

*verschiedene Typen von Permutationen in  $S_n$ .*

**Beweis:**

Klar. □

## Lemma 177

Es gibt

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

verschiedene Permutationen in  $S_n$  vom Typ  $1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}$  (Beachte:  $0! = 1$ ). Insbesondere gilt:

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum b_i = k \\ \sum i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}$$

und

$$n! = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum_{i=1}^n i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \dots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \dots \cdot n^{b_n}}.$$

## Beweis:

Sei Typ  $1^{b_1} 2^{b_2} \dots n^{b_n}$  gegeben:

$$\overbrace{(\_)(\_)\dots(\_)}^{b_1} \overbrace{(\_)(\_)\dots(\_)}^{b_2} \dots \overbrace{(\_)\dots(\_)}^{b_n (\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es  $n$  freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus  $S_n$ . Dafür gibt es  $n!$  Möglichkeiten.

Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge  $i$  beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge  $i$  in sich  $i$ -mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge  $i$  oben genau  $b_i! \cdot i^{b_i}$  verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor **überzählt** werden. □



## Beispiel 178

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

## 4.7 Abzählkoeffizienten

### 4.7.1 Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \quad \forall n \geq k > 0$$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \forall n > 0$$

2

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n \geq k > 0$$

3

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \forall n \geq k > 0$$

Weiter definiert man:

1

$$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \quad \forall n \in \mathbb{C}$$

2

$$\binom{0}{0} := 1$$

3

$$x^{\underline{k}} = x \cdot (x - 1) \cdot \dots \cdot (x - k + 1)$$

$$x^{\overline{k}} = x \cdot (x + 1) \cdot \dots \cdot (x + k - 1) \quad \forall x \in \mathbb{C}, k \geq 0$$

4

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Lemma 179

$\binom{x}{k}$  ist, für  $k \geq 0$ , ein Polynom in  $x$  vom Grad  $k$ , und es gilt auch für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathbb{C}$

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

### Beweis:

Da für  $k \leq 0$  per Definition der Binomialkoeffizienten Gleichheit gilt, betrachten wir nur  $k > 0$ . Es ist dann

$$\binom{x}{k} - \left[ \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k} \right]$$

ein Polynom in  $x$  vom Grad  $\leq k$ . Für alle  $x \in \mathbb{N}$  ist dieses Polynom gleich 0. Ein Polynom einer Variablen mit unendlich vielen Nullstellen ist aber sicher identisch 0 (Fundamentalsatz der Algebra (Satz 139)).

## Beweis (Forts.):

Eine weitere Möglichkeit, den Beweis zu führen:

$$\begin{aligned}x^k &= x \cdot (x-1)^{k-1} = (k+x-k)(x-1)^{k-1} \\ &= k \cdot (x-1)^{k-1} + (x-k)(x-1)^{k-1} \\ &= k \cdot (x-1)^{k-1} + (x-1)^k\end{aligned}$$

Also gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x^k}{k!} = \frac{(x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^k}{k!} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$



# Das Pascalsche Dreieck

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1	0	
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

benannt nach **Blaise Pascal** (1623–1662).

### Beobachtung:

Die Zeilensumme in der  $n$ -ten Zeile ist  $2^n$ .

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

## Lemma 180

Für die Spaltensumme bis zur  $n$ -ten Zeile gilt:

$$\sum_{m=0}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall n, k \geq 0$$

### Beweis:

(Vollständige Induktion über  $n$ )

Induktionsanfang:  $n = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^0 \binom{0}{k} &= \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &\stackrel{!}{=} \binom{0+1}{k+1} = \binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$



## Beweis (Forts.):

Induktionsschluss:  $n \mapsto n + 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=0}^n \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}\end{aligned}$$



## Beispiel 181

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$k = 2, n = 5 :$$

$$\sum_{m=0}^5 \binom{m}{2} = \binom{6}{3}$$

## Lemma 182

Für die Diagonalsumme gilt:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{C}$$

**Beweis:**

(Vollständige Induktion über  $m$ )

Induktionsanfang:  $m = 0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \binom{n+k}{k} &= \binom{n}{0} = 1 \\ &\stackrel{!}{=} \binom{0+n+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Induktionsschluss  $m \mapsto m + 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} + \binom{m+n+1}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m} + \binom{m+n+1}{m+1} \\ &= \binom{m+n+2}{m+1}\end{aligned}$$



## Beispiel 183

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$m = 3, n = 2 :$$

$$\sum_{k=0}^3 \binom{2+k}{k} = \binom{6}{3}$$

## Beobachtungen:

- Negation

$$(-x)^{\bar{k}} = (-1)^k \cdot x^{\bar{k}}$$

- Binomialsatz

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

## Spezialfälle des Binomialsatzes:

①  $x = y = 1$ :

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

(Beweis zur Zeilensumme!)

②  $y = 1$ :

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$$

③  $x = -1, y = 1$  ( $n = 0$  klar; sei also  $n > 0$ ):

$$0 = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$