Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Jonas Pfoh

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 10
25. Januar 2008

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin: 25. Januar 2008(vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Algorithmus CONTRACT zur Berechnung eines minimalen Schnitts in einem Multigraphen G so implementiert werden kann, dass sein Zeitbedarf $O(n^2)$ ist. *Hinweis*: Sie können dabei davon ausgehen, dass die Anzahl von Kanten in G polynomiell in n ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Urne mit n Bällen, wobei w Bälle weiß und $n - w$ Bälle schwarz seien. Für ein r mir $n/2 \leq wr \leq n$ werden nun ohne Zurücklegen r Bälle zufällig gezogen. Zeigen Sie

$$\Pr[\text{genau ein weißer Ball wird gezogen}] \geq 1/2e$$

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei Boolsche Matrizen $A, B \in \{0,1\}^{n \times n}$. Das Boolsche Matrixprodukt $C = A \cdot B$ ist ebenfalls eine $n \times n$-Matrix mit

$$c_{ij} = \bigvee_{1 \leq k \leq n} (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

Ein *Zeuge* für c_{ij} ist ein Index $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $a_{ik} \wedge b_{kj} = 1$ ist. Ein Zeuge k für c_{ij} heißt *eindeutig*, falls es keinen Zeugen k' mit $k' \neq k$ für c_{ij} gibt. Beachten Sie, dass für einen Eintrag c_{ij} auch mehrere oder gar keinen Zeugen geben kann.
Im Folgenden sei $MM(n)$ eine obere Schranke für die benötigte Zeit um zwei $n \times n$-Matrizen miteinander zu multiplizieren. Die obere Schranke gelte sowohl für die Multiplikation zweier Boolescher Matrizen, als auch für die zweier Integer-Matrizen.

a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in Zeit $O(MM(n))$ Zeugen für alle Einträge c_{ij} mit eindeutigem Zeugen berechnet.

b) Entwerfen Sie einen randomisierten Algorithmus, der für ein gegebenes t mit Wahrscheinlichkeit mindestens $(1 - 1/n)$ Zeugen für all diejenigen Einträge c_{ij} mit

$$2^{t-1} \leq \text{Anzahl der Zeugen für } c_{ij} < 2^t$$

findet. Verwenden Sie dazu die Lösung für eindeutige Zeugen und das Resultat aus Aufgabe 2.

c) Entwerfen Sie einen Las-Vegas-Algorithmus, der in Zeit $O(MM(n) \log^2 n)$ Zeugen für alle $c_{ij} = 1$ berechnet.