Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Christian Scheideler
Jonas Pfoh

Wintersemester 2007/2008
Übungsblatt 1
19. Oktober 2007

Randomisierte Algorithmen

Abgabetermin: 26.10.2007 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1

Angenommen wir setzen k Personen unabhängig voneinander an einen runden Tisch an dem $n \geq k$ Stühle stehen. Was ist der Erwartungswert für die Anzahl der Personen, die keinen direkten Tischnachbarn haben ?
Hinweis. Benutzen Sie eine Indikatorvariable und die Linearität des Erwartungswertes.

Aufgabe 2

Volltrunkene Matrosen Ein Schiff geht an einem Hafen vor Anker und 40 Seeleute gehen an Land um sich etwas zu amüsieren. Mitten in der Nacht kommen sie volltrunken zurück und deswegen wählt jeder von ihren die Kabine in der er schläft zufällig. Was ist die erwartete Anzahl Matrosen, die in ihrer eigenen Kabine ihren Rausch ausschlafen?

Aufgabe 3

Angenommen bei einem Experiment tritt ein Ereignis E mit Wahrscheinlichkeit p ein. Was ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis bei n/p Wiederholungen des Experiments mindestens einmal eintritt ?

Aufgabe 4

Aus der Vorlesung (Satz 1.8) ist folgendes bekannt:
Chernoff Ungleichung
Seien $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ unabhängige Indikatorvariablen. Sei $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ und $\mu = \mathrm{E}[\mathrm{X}]$. Dann gilt für alle $\delta \geq 0$, dass

$$Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/(2(1+\delta/3))}$$

und für alle $0 \leq \delta < 1$, dass

$$Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\delta^2\mu/2}$$

Die erste Ungleichung ist schon bewiesen. Bitte beweisen Sie die zweite Ungleichung ($\mathrm{Pr}[\mathrm{X} \leq (1\text{-}\delta)\mu]$).