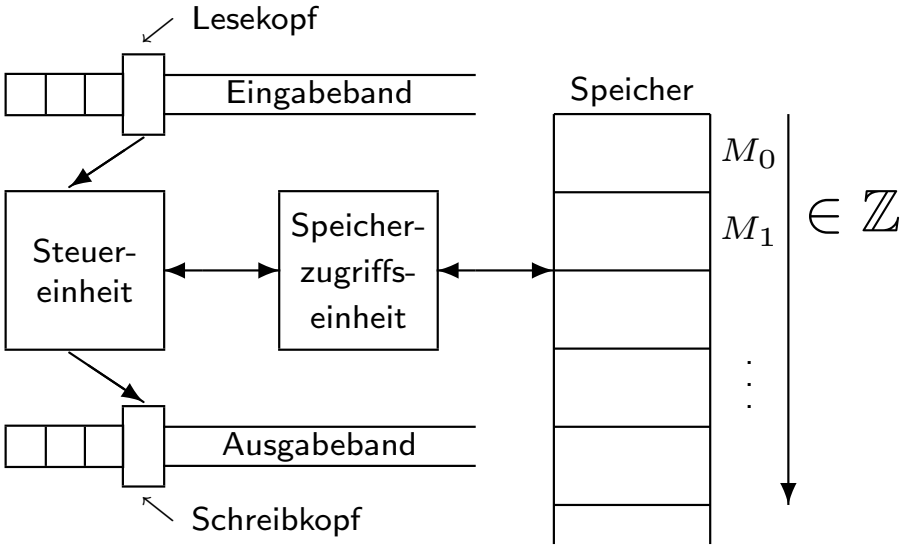
4. Maschinenmodelle

- Turingmaschine (TM)
- Registermaschine (RAM)
- Boolesche Schaltkreise
- (Quantencomputer)
- (DNA-Computer)
- ...



Registermaschine

5. Komplexitätsmaße

Ein Problem ist formal eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. $x \in \Sigma^*$ heißt eine Probleminstanz für L, wenn wir untersuchen wollen, ob $x \in L$.

Sei M eine (Turing- oder) Registermaschine.

- M entscheidet L, falls für alle $x \in \Sigma^*$ M nach endlicher Zeit hält mit

$$\begin{cases} \text{Antwort „ja“, falls } x \in L \\ \text{Antwort „nein“, falls } x \notin L \end{cases}$$

- M akzeptiert L, falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$\begin{cases} \text{falls } x \in L : M \text{ hält mit Antwort “ja“} \\ \text{falls } x \notin L : M \text{ hält mit Antwort “nein“ oder hält nicht.} \end{cases}$$

- Berechnung von Funktionen:
  Seien Σ, Γ Alphabete. Eine TM (bzw. RAM) M berechnet eine (partielle) Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gdw. für alle x im Definitionsbereich von f gilt:
  bei Eingabe x hält M nach endlich vielen Schritten, und zwar mit Ausgabe $f(x)$.

Wir berechnen die Komplexität eines Problems in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe:
Eingaben $x \in \Sigma^n$ haben Länge n.

Insbesondere bei Funktionen oder Problemen, deren Eingabe als „als aus n Argumenten bestehend“ interpretiert werden kann, betrachten wir oft auch die uniforme Eingabelänge n.

Beispiel 1

Sollen n Schlüssel $\in \Sigma^*$ (vergleichsbasiert) sortiert werden, so nehmen wir als Eingabelänge gewöhnlich n, die Anzahl der Schlüssel, und nicht ihre Gesamtlänge.

Komplexitätsressourcen:

Man betrachtet u.a.

- Rechenzeit
- Speicherplatz
- Anzahl von Vergleichen
- Anzahl von Multiplikationen
- Schaltkreisgröße
- Programmgröße
- Schachtelungstiefe von Laufschleifen
- ...

Komplexität der Ressourceneinheiten:

Wir unterscheiden

- uniformes Kostenmodell: Die Kosten jeder Ressourceneinheit sind 1.
- logarithmisches Kostenmodell: Die Kosten eines Rechenschritts sind durch die Länge der Operanden bestimmt:

  1. Der Zeitbedarf eines Rechenschritts ist gleich der größten Länge eines Operanden des Rechenschritts.
  2. Der Platzbedarf einer Speicherzelle ist gleich der größten Länge eines darin gespeicherten Wertes.

Wir unterscheiden verschiedene Arten der Komplexität:

- worst-case Komplexität:

$$C_{\text{wc}}(n) := \max\{C(x);\ |x| = n\}$$

- durchschnittliche Komplexität (average complexity):

$$C_{\text{avg}}(n) := \frac{1}{|\Sigma^n|} \sum_{|x|=n} C(x)$$

allgemeiner: Wahrscheinlichkeitsmaß μ

$$C_{\text{avg}}(n) := \sum_{x \in \Sigma^n} \mu(x) \cdot C(x)$$

Wir unterscheiden verschiedene Arten der Komplexität:

- amortisierte Komplexität:
  durchschnittliche Kosten der Operationen in Folgen der Länge n
  worst-case über alle Folgen der Länge n von Operationen
- probabilistische oder randomisierte Komplexität:
  Algorithmus hat Zufallsbits zur Verfügung. Erwartete Laufzeit (über alle Zufallsfolgen) für feste Eingabe x, dann worst-case für alle $|x| = n$.

Beispiel 2

$r := 2$
for $i := 1$ **to** n **do** $r := r^2$ **od**
co `das Ergebnis ist` 2^{2^n} **oc**

- Zeitbedarf:
  - uniform: n Schritte
  - logarithmisch: $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 = \Theta(2^n)$
- Platzbedarf:
  - uniform: $\mathcal{O}(1)$
  - logarithmisch: 2^n