Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2007/08

Übersicht

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Algorithmus 6 : Approximation eines ℓ-Subgraph mit hohem $\overline{\deg}$

Input : Graph $G = (V, E)$ und
gerader Parameter $\ell \in \mathbb{N}$ (mit $|V| \geq \ell$)

Output : Menge von ℓ Knoten von G

Sortiere die Knoten in absteigender Reihenfolge ihrer Grade;
Sei H die Menge von $\frac{\ell}{2}$ Knoten von höchstem Grad;
Berechne $N_H(v) = |N(v) \cap H|$ für alle Knoten $v \in V \setminus H$;
Sortiere die Knoten in $V \setminus H$ in absteigender Reihenfolge der N_H-Werte;
Sei R die Menge von $\frac{\ell}{2}$ Knoten von $V \setminus H$ mit den höchsten N_H-Werten;
return $H \cup R$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Satz

Sei G ein Graph auf n Knoten und sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine gerade natürliche Zahl mit $\ell \leq n$.
Sei $A(G,\ell)$ der Durchschnittsgrad des induzierten Teilgraphen, der vom vorstehenden Algorithmus ausgegeben wird.
Dann gilt:

$$\gamma^*(G,\ell) \leq \frac{2n}{\ell} \cdot A(G,\ell)$$

bzw.

$$A(G,\ell) \geq \frac{\ell}{2n} \cdot \gamma^*(G,\ell)$$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Beweis.

- Für Knotenteilmengen $U, U' \subseteq V$ sei $E(U, U')$ die Menge der Kanten mit einem Endpunkt in U und einem Endpunkt in U'.
- Sei $m_U = |E(G[U])|$
- Sei $\deg_H$ der Durchschnittsgrad der $\frac{\ell}{2}$ Knoten von G mit höchstem Grad bezüglich G. Es gilt: $\deg_H \geq \gamma^*(G, \ell)$.
- Man erhält für die Anzahl der Kanten zwischen H und dem Rest $V \setminus H$:

$$|E(H, V \setminus H)| = \deg_H \cdot |H| - 2m_H \geq \frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H \geq 0$$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Beweis.

- Weil der Algorithmus greedy (gierig) arbeitet, muss der Anteil der Kanten nach R (i.Vgl. zu $V \setminus H$) mindestens so groß sein, wie der Anteil der Knoten:

$$\frac{|E(H,R)|}{|E(H,V\setminus H)|} \geq \frac{|R|}{|V\setminus H|} = \frac{\ell/2}{n-\ell/2} = \frac{\ell}{2n-\ell} > \frac{\ell}{2n}$$

- Also ist die Gesamtzahl der Kanten in $G[H \cup R]$ mindestens

$$\left(\frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H\right) \cdot \frac{\ell}{2n} + m_H \geq \frac{\deg_H \cdot \ell^2}{4n}$$

$\square$

Approximation von **Dense ℓ-Subgraph**

- Die Approximationsgüte wird umso besser, je größer ℓ im Vergleich zu n ist.

- Es gibt andere Approximationsverfahren mit Güte $\mathcal{O}(\frac{n}{\ell})$, z.B. durch rekursives Löschen von Knoten mit kleinstem Grad.

Übersicht

Zusammenhang in Graphen / Netzwerken

- beschäftigt sich mit der Stärke der Verbindung zwischen zwei Knoten in Bezug auf die Anzahl knoten- bzw. kantendisjunkter Wege
- "Eine Kette ist nur so stark wie ihr schwächstes Glied."

$\Rightarrow$ Wir suchen nach den schwächsten Elementen, die beim Entfernen die Verbindung zerstören.

Definition

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Knoten-Zusammenhang

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *k-knotenzusammenhängend*, falls $|V| > k$ und für jede echte Knotenteilmenge $X \subset V$ mit $|X| < k$ der Graph $G - X$ zusammenhängend ist.
Der *Knotenzusammenhang* $\kappa(G)$ des Graphen G ist die größte natürliche Zahl k, für die G k-knotenzusammenhängend ist.

Bemerkungen:

- Jeder nicht-leere Graph ist 0-knotenzusammenhängend, da es keine Teilmenge X mit $|X| < 0$ gibt.
- Obwohl es wünschenswert wäre, dass die Bezeichnung "1-knotenzusammenhängend" gleichzusetzen ist mit der Bezeichnung "zusammenhängend", wird üblicherweise der Graph bestehend aus nur einem einzelnen Knoten zwar als zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend bezeichnet.

Kanten-Zusammenhang und k-Komponenten

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-kantenzusammenhängend, falls $|V| \geq 2$ und für jede Kantenteilmenge $Y \subseteq E$ mit $|Y| < k$ der Graph $G - Y$ zusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang $\lambda(G)$ des Graphen G ist die größte natürliche Zahl k, für die G k-kantenzusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang eines unzusammenhängenden Graphen sowie des Graphen bestehend aus einem einzelnen Knoten ist 0.

Definition

Die maximalen k-fach knoten-/kanten-zusammenhängenden Teilgraphen werden als k-Knoten-/Kanten-Zusammenhangskomponenten bezeichnet.

Zusammenhang in gerichteten Graphen

Definition

Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend, wenn es für jeden Knoten einen gerichteten Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler stark zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als starke Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Knoten- und Kantenzusammenhang können auf gerichtete Graphen übertragen werden, indem man in der jeweiligen Definition fordert, dass $G - X$ bzw. $G - Y$ *stark zusammenhängend* ist.

Separatoren

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Knotenteilmenge $C \subset V$ heißt Knoten-Separator, wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - C$ größer als in G ist.

Falls zwei Knoten s und t zwar in G in der gleichen Zusammenhangskomponente sind, aber nicht in $G - C$, dann bezeichnet man C als s-t-Knoten-Separator.

Kanten-Separatoren und s-t-Kanten-Separatoren sind analog definiert.

s-t-Separatoren können auch auf gerichtete Graphen übertragen werden: eine Knoten- bzw. Kantenmenge ist dann ein s-t-Separator, wenn es keinen gerichteten Pfad mehr von s nach t gibt, nachdem die Menge aus dem Graph entfernt wurde.

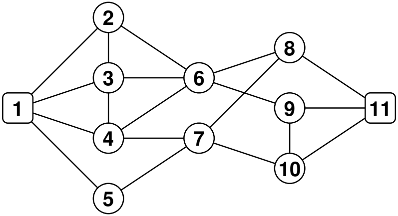
Disjunkte Pfade

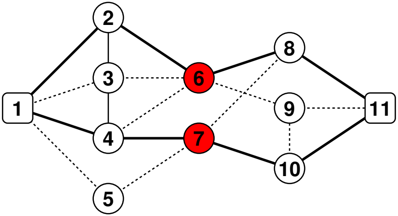
Definition

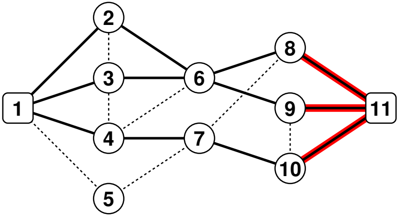
Zwei (gerichtete oder ungerichtete) Pfade von s nach t werden als knotendisjunkte s-t-Pfade bezeichnet, wenn sie keinen Knoten außer s und t gemeinsam haben.

Zwei Pfade werden als kantendisjunkte Pfade bezeichnet, wenn sie keine Kante gemeinsam haben.

Disjunkte s-t-Pfade







2 knotendisjunkte 1-11-Pfade

3 kantendisjunkte 1-11-Pfade

Lokaler Zusammenhang

Definition

Für zwei Knoten s und t eines Graphen G ist der lokale (Knoten-)Zusammenhang $\kappa_G(s,t)$ definiert als die minimale Anzahl von Knoten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von s nach t gibt.

Für den Fall, dass zwischen s und t eine Kante existiert, können sie nicht durch das Löschen von Knoten separiert werden. Deshalb wird der lokale (Knoten-)Zusammenhang in diesem Fall $\kappa_G(s,t) = n - 1$ definiert. (Anderenfalls wäre höchstens $\kappa_G(s,t) = n - 2$ möglich.)

Der lokale Kanten-Zusammenhang zweier Knoten s und t ist entsprechend definiert als die minimale Anzahl von Kanten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von s nach t gibt.

Lokaler Zusammenhang

Hinweis:
Für ungerichtete Graphen gilt $\kappa_G(s,t) = \kappa_G(t,s)$ und $\lambda_G(s,t) = \lambda_G(t,s)$, was für gerichtete Graphen im Allgemeinen nicht gilt.

Zweifachzusammenhang

Definition

Ein Artikulationsknoten ist ein Knoten, der beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.
Eine Brücke ist eine Kante, die beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.
Eine Zweifachzusammenhangskomponente ist ein maximaler 2-fach (knoten-)zusammenhängender Teilgraph.
Ein Block ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Artikulationsknoten enthält, d.h. die Menge aller Blocks eines Graphen besteht aus den isolierten Knoten, den Brücken, sowie den Zweifachzusammenhangskomponenten.

Block-Graph und CutPoint-Graph

Definition

Der Block-Graph $B(G)$ eines Graphen G hat jeweils einen Knoten für jeden Block von G, wobei zwei Knoten des Block-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Blöcke in G einen (Artikulations-)Knoten gemeinsam haben.
Der CutPoint-Graph $C(G)$ eines Graphen G hat jeweils einen Knoten für jeden Artikulationsknoten von G, wobei zwei Knoten des CutPoint-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Artikulationsknoten in G zum gleichen Block gehören.

Satz (Harary)

Für jeden Graphen gilt:

$$B(B(G)) = C(G) \quad \textit{und} \quad B(C(G)) = C(B(G))$$

Block-CutPoint-Graph

Definition

Der Block-CutPoint-Graph eines Graphen G ist der bipartite Graph, dessen Knotenmenge aus je einem Knoten für jeden Artikulationsknoten von G und je einem Knoten für jeden Block von G besteht, wobei ein CutVertex-Knoten mit einem Block-Knoten genau dann durch eine Kante verbunden ist, wenn der Artikulationsknoten zu dem entsprechenden Block gehört.

Satz (Harary & Prins)

Der Block-CutPoint-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.

Fundamentale Ungleichung

Satz

Für jeden nicht-trivialen Graphen G gilt:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

"nicht-trivial" soll den Graph ohne Knoten und den Graph auf einem Knoten ausschließen, hier kommt es auf die genaue Definition von κ und λ an.

Beweis.

- Die inzidenten Kanten eines Knotens v mit $\deg(v) = \delta(G)$ bilden einen Kanten-Separator.

$\Rightarrow$ $\lambda(G) \leq \delta(G)$

Fundamentale Ungleichung

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens zwei Knoten. Betrachte minimalen Kanten-Separator, der die Knotenmenge in S und $\bar{S} = V \setminus S$ partitioniert.
- Für den Fall, dass alle Kanten zwischen S und $\bar{S}$ vorhanden sind, gilt $\lambda(G) = |S| \cdot |\bar{S}| \geq n - 1$ (und $\kappa(G)$ kann nicht größer als $n - 1$ sein).
- Anderenfalls existieren Knoten $x \in S$ und $y \in \bar{S}$ mit $\{x, y\} \notin E$, wobei die Nachbarn von x in $\bar{S}$ zusammen mit allen Knoten aus $S \setminus \{x\}$, die Nachbarn in $\bar{S}$ haben, einen Knoten-Separator bilden.
  Dieser Knoten-Separator ist höchstens so groß wie die Anzahl der Kanten von S nach $\bar{S}$, und er separiert mindestens x und y.

□

Das n-Chain / n-Arc Theorem

Satz (Menger, 1927)

Seien P und Q Teilmengen der Knoten eines ungerichteten Graphen.
Dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter Pfade, die Knoten von P mit Knoten von Q verbinden, gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenmenge, die alle Pfade zwischen Knoten in P und Knoten in Q überschneidet bzw. unterbricht.

Der Satz von Menger

Satz ("Satz von Menger")

Seien s und t zwei Knoten eines ungerichteten Graphen. Wenn s und t nicht adjazent sind, dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter s-t-Pfade gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Knoten-Separators.

Satz (Kantenversion)

Die maximale Anzahl kantendisjunkter s-t-Pfade ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Kanten-Separators.

(Ford/Fulkerson, Dantzig/Fulkerson, Elias/Feinstein/Shannon, 1956)

Eng verwandt: MaxFlow-MinCut-Theorem
(Kantenversion von Menger's Theorem kann als Spezialfall gesehen werden, wo alle Kantengewichte den gleichen Wert haben.)

Whitney's Theorem

Satz (Whitney, 1932)

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-(knoten-)zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k knotendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Schwierig bei der Herleitung ist nur, dass der Satz von Menger fordert, dass die Knoten nicht adjazent sind.
Da diese Bedingung bei der Kantenversion nicht auftritt, folgt aus dieser sofort:

Satz

Sei G ein nicht-trivialer Graph und k eine natürliche Zahl.
G ist genau dann k-kanten-zusammenhängend, wenn alle Paare verschiedener Knoten (s, t) durch k kantendisjunkte s-t-Pfade verbunden werden können.

Gemischter Knoten-/Kanten-Zusammenhang

Definition

Ein Paar (k, l) heißt *Zusammenhangspaar* zweier Knoten s und t eines Graphen, falls eine Menge aus k Knoten und l Kanten existiert, die jeden Weg zwischen s und t beim Entfernen zerstört, aber es keine solche Menge bestehend aus $k - 1$ Knoten und l Kanten oder k Knoten und $l - 1$ Kanten gibt.

Satz (Beineke & Harary, 1967)

Wenn (k, l) ein Zusammenhangspaar zweier Knoten s und t in einem Graphen ist, dann gibt es $k + l$ kantendisjunkte Pfade von s nach t, von denen k knotendisjunkte s-t-Pfade sind.

Einfache Schranken

Satz

Der maximale (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist

$$\begin{array}{rl} \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor : & \textit{falls } m \geq n-1 \\ 0 : & \textit{sonst} \end{array}$$

Der minimale (Knoten-/Kanten-)Zusammenhang in einem Graphen mit n Knoten und m Kanten ist

$$\begin{array}{rl} m - \binom{n-1}{2} : & \textit{falls } \binom{n-1}{2} < m \leq \binom{n}{2} \\ 0 : & \textit{sonst} \end{array}$$

Für jeden Graphen G mit $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ gilt: $\lambda(G) = \delta(G)$.

Überlappung von k-Knoten-Komponenten

Die offensichtliche Tatsachen, dass

- zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten keinen Knoten gemeinsam haben können und
- zwei verschiedene Blöcke höchstens einen Knoten gemeinsamen haben können,

lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Satz

Zwei verschiedene k-(Knoten-)Komponenten haben höchstens $k-1$ Knoten gemeinsam.

Nicht-Überlappung von k-Kanten-Komponenten

Satz (Matula, 1968)

Für jede natürliche Zahl k sind die k-Kanten-Komponenten eines Graphen knotendisjunkt.

Nicht-Überlappung von k-Kanten-Komponenten

Beweis.

- Betrachte (überlappende) Zerlegung $\tilde{G} = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t$ eines zusammenhängenden Teilgraphen $\tilde{G}$ von G.
- Sei $C = (A, \bar{A})$ ein minimaler Kanten-Schnitt von $\tilde{G}$.
- Annahme: $\tilde{G}$ hat mindestens zwei Knoten (sonst trivial)
- Für jeden Teilgraph G_i, der eine bestimmte Kante e des MinCuts C enthält, enthält C auch einen Schnitt für G_i. Ansonsten wäre dieser Teil überflüssig da alle Knoten in $G_i - C$ (und damit auch in $\tilde{G} - C$) noch zusammenhängen, und das würde der Minimum-Bedingung des Schnitts widersprechen.

$\Rightarrow$ $\exists G_i\colon \quad \lambda(\tilde{G}) = |C| \geq \lambda(G_i)$
(denn jede Kante aus C gehört zu mindestens einer k-Kanten-Komponente G_i)

$\Rightarrow$ $\lambda(\tilde{G}) \geq \min_{1 \leq i \leq t}\{\lambda(G_i)\}$

Satz von Mader

Obwohl aus der fundamentalen Ungleichung $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ folgt, dass k-Knoten-/Kanten-Zusammenhang einen Minimalgrad $\geq k$ impliziert, ist das Gegenteil nicht unbedingt der Fall.
Ein hoher Durchschnittsgrad impliziert aber die Existenz eines relativ gut zusammenhängenden Teilgraphen:

Satz (Mader, 1972)

Jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $4k$ enthält einen k-zusammenhängenden Teilgraph.

Kanten-Schnitte minimalen Gewichts (Minimum Cuts)

- ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E)$
- zwei disjunkte Knotenteilmengen $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$
- Gewichtssumme der Kanten von einem Knoten in X zu einem Knoten in Y: $w(X, Y)$ (für gerichtete Graphen analog)

Fakt

Ein Kanten-Schnitt minimalen Gewichts in einem zusammenhängenden Graphen mit echt positiven Kantengewichten induziert einen zusammenhängenden Teilgraphen.

Minimum Cuts

Lemma

Sei $(S, V \setminus S)$ ein Minimum Cut in $G = (V, E)$. Dann gilt für jede nicht-leere Teilmenge T von S:

$$w(T, S \setminus T) \geq \frac{\lambda}{2}$$

Beweis.

- Annahme: $w(T, S \setminus T) < \frac{\lambda}{2}$
- $w(T, V \setminus S) + w(S \setminus T, V \setminus S) = \lambda$
- o.B.d.A.: $w(T, V \setminus S) \leq \frac{\lambda}{2}$
  (sonst vertausche T und $S \setminus T$)

$\Rightarrow$ $w(T, V \setminus T) = w(T, S \setminus T) + w(T, V \setminus S) < \lambda$ (Widerspruch)

$\square$