Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Übungsblatt 12
9. Juli 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Abgabetermin: 16. Juli 2007 **vor** *der Vorlesung*

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

In vielen Programmiersprachen gibt es Konstrukte der Art **for** $x_i := x_n$ **to** x_l **do** P **end**. wobei vorausgesetzt sei, dass die Variablen x_i, x_l, x_n bei der Ausführung des Programms P nicht verändert werden. Diese Konstrukte werden **for**-Schleifen genannt.

Geben Sie ein $LOOP$-Unterprogramm an, das **for**-Schleifen simuliert.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $a(x, y)$ die Ackermann-Funktion. Zeigen Sie:

Für alle Konstanten $c \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $g(n) = a(c, n)$ primitiv rekursiv.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten die Menge $W_a = a((\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0))$ aller Funktionswerte der Ackermann-Funktion.

Zeigen Sie, dass W_a entscheidbar ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei eine berechenbare Auflistung (Codierung) aller Turingmaschinen, die jedem Wort $w \in \{0, 1\}^*$ eine Turingmaschine M_w zuordnet. Zeigen Sie:

1. Die Sprache $L = \{w\,;\, L(M_w) \text{ ist semi-entscheidbar}\}$ ist entscheidbar.
2. Das allgemeine Halteproblem H ist semi-entscheidbar.

Hinweis: *Die als* Vorbereitung *bezeichneten Aufgaben werden nicht bewertet und dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben, die ebenfalls nicht bewertet werden. Die Abgabe einer Bearbeitung der Vorbereitungsaufgaben zusammen mit der Bearbeitung der Hausaufgaben wird empfohlen. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet.*

Vorbereitung 1

Die Fibonacci-Funktion $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, gegeben durch $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für alle $n \geq 2$ und $F_0 = 0, F_1 = 1$, zählt zu den schnell wachsenden Funktionen.
Vergleichen Sie das Wachstum von F mit dem Wachstum der Ackermann-Funktion.
Ist F primitiv rekursiv? Geben Sie für Ihre Anwort eine informelle Begründung.

Vorbereitung 2

Welche Aussagen sind richtig? Geben Sie jeweils eine knappe Begründung an.

1. Jede kontextfreie Sprache ist entscheidbar.
2. Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.
3. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.
4. Für jede unentscheidbare Sprache A gibt es eine echte Obermenge, die ebenfalls unentscheidbar ist.
5. Aus 'A entscheidbar' und '$A \cap B$ entscheidbar' folgt 'B entscheidbar'.

Tutoraufgabe 1

Wenden Sie zum Beweis der folgenden Aussagen Techniken der Reduzierbarkeit eines Problems A auf ein Problem B an. Wir beziehen uns wieder auf eine berechenbare Auflistung aller Turingmaschinen, die jedem Wort $w \in \{0,1\}^*$ eine Turingmaschine M_w zuordnet. Zeigen Sie:

1. $H_{\Sigma^*} = \{w\,;\, M_w \text{ hält für alle Eingaben}\}$ ist unentscheidbar.
2. Sei $L = \{a^n b^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $A = \{w\,;\, L(M_w) = L\}$ unentscheidbar.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie mihilfe des Satzes von Rice:

1. $L_1 = \{w\,;\, L(M) \text{ ist kontextfrei}\}$ ist unentscheidbar.
2. $L_2 = \{w\,;\, M_w \text{ berechnet } 3n+5\}$.