

---

## Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

---

*Abgabetermin: 22.12.2006 vor der Vorlesung*

### **Aufgabe 1 (10 Punkte)**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das zweitgrößte Element einer  $n$ -elementigen Menge mit  $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$  Vergleichen gefunden werden kann. Geben Sie einen vollständigen formalen Beweis an, dass dies auch eine untere Schranke ist.

### **Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Der Median einer  $k$ -elementigen Menge (aus einem total geordneten Universum) ist das  $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ -kleinste Element. Seien nun zwei sortierte Mengen mit je  $n$  Elementen gegeben (alle  $2n$  Elemente seien paarweise verschieden). Zeigen Sie, dass der Median aller  $2n$  Elemente in Zeit  $O(\log n)$  bestimmt werden kann. Achten Sie darauf, dass in der Rekursion auch Teilmengen mit gerader Kardinalität auftreten können.

### **Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Gegeben sei eine  $n$ -elementige Menge  $M$ . Wieviele Vergleiche braucht man, um das Minimum *und* das Maximum von  $M$  gleichzeitig zu bestimmen? Beweisen Sie eine obere wie auch untere Schranke.

### **Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Betrachten Sie folgenden einfachen Algorithmus um das  $k$ -kleinste Element einer  $n$ -elementigen Menge zu bestimmen. Wir wählen ein Element  $x$  und teilen die restlichen Elemente in zwei Mengen,  $K$  und  $G$ , die die kleineren bzw. größeren Elemente enthalten. Wenn  $|K| \geq k$ , dann bestimmen wir rekursiv das  $k$ -kleinste Element in  $K$ , wenn  $|K| = k - 1$ , dann ist  $x$  das gesuchte Element, andernfalls bestimmen wir rekursiv das  $k - |K| - 1$ -kleinste Element in  $G$ . Wir gehen davon aus, dass alle Ordnungen gleichwahrscheinlich sind, und dass die Menge nur verschiedene Elemente enthält. Sei  $C_{n,k}$  die durchschnittliche Anzahl von Vergleichen, die gebraucht werden, um das  $k$ -kleinste Element einer  $n$ -elementigen Menge mit dieser Methode zu bestimmen. Zeigen Sie, dass  $C_{n,k} = O(n)$ .