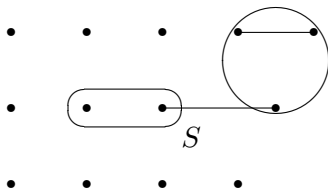


Satz 129

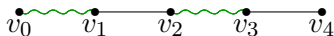
Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $|V|$ gerade ist und es kein $S \subseteq V$ gibt, so dass der durch $V \setminus S$ induzierte Teilgraph mehr als $|S|$ Zusammenhangskomponenten ungerader Größe enthält.



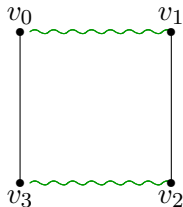
Bemerkung: Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar, da in einem perfektem Matching in jeder „ungeraden“ ZHK mindestens ein Knoten mit einem Knoten in S gematcht sein muss.

Definition 130

- Ein einfacher Pfad (Kreis) v_0, v_1, \dots, v_r heißt **alternierend** bzgl. eines Matchings M , falls die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i < r$, abwechselnd in M und nicht in M liegen.



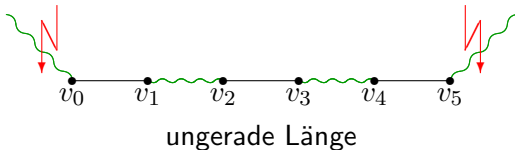
gerade Länge



- Ein alternierender Pfad bzgl. eines Matchings M heißt **augmentierend**, falls er bzgl. „ \subseteq “ maximal ist und an beiden Enden ungematchte Knoten hat.

Definition 130

- ② Ein alternierender Pfad bzgl. eines Matchings M heißt **augmentierend**, falls er bzgl. „ \subseteq “ maximal ist und an beiden Enden ungematchte Knoten hat.



Bemerkung: Es kann keine **augmentierenden Kreise** geben.

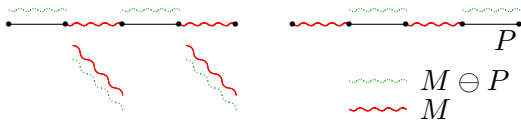
Definition 131

Seien S, T zwei Mengen, dann bezeichne $S \ominus T$ die **symmetrische** Differenz von S und T , d.h. $S \ominus T = (S - T) \cup (T - S)$.

Lemma 132 (Augmentierung eines Matchings)

Sei M ein Matching, P ein augmentierender Pfad bzgl. M . Dann ist auch $M \ominus P$ ein Matching, und es gilt $|M \ominus P| = |M| + 1$.

Beweis:



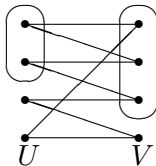
□

Satz 133 (Heiratsatz [Frobenius, Hall, Rado, König])

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. G enthält ein Matching der Kardinalität $|U|$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall A \subseteq U : |N(A)| \geq |A|,$$

wobei $N(A)$ die Nachbarschaft von A (in V) bezeichnet.



Beweis:

Die Notwendigkeit („ \Leftarrow “) ist klar.

„ \Rightarrow “: M sei ein maximum Matching in G . **Annahme:** $|M| < |U|$. Sei $A' \subseteq U$ die Teilmenge der durch M nicht gematchten Knoten in U . Seien weiter A (bzw. B) die von A' aus mittels alternierender Pfade erreichbaren Knoten in U (bzw. V). Enthält B einen ungematchten Knoten, dann ist ein dazugehöriger alternierender Pfad P augmentierend und $|M \oplus P| > |M|$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Andernfalls ist $|A| > |B|$ (da A zu jedem Knoten in B seinen gematchten Partner enthält), aber auch, im Widerspruch zur Voraussetzung, $N(A) \subseteq B$, also $|N(A)| < |A|$. □

Alternativer Beweis:

Die Notwendigkeit („ \Leftarrow “) ist klar.

„ \Rightarrow “: Sei M ein Matching in G , mit $|M| < |U|$, und sei $u_0 \in U$ ein in M ungematchter Knoten. Da $|N(\{u_0\})| \geq 1$, hat u_0 einen Nachbarn $v_1 \in V$. Falls v_1 ungematcht ist, sind wir fertig, da wir einen augmentierenden Pfad gefunden haben. Andernfalls sei $u_1 \in U$ der mit v_1 gematchte Knoten. Dann ist $u_1 \neq u_0$ und $|N(\{u_0, u_1\})| \geq 2$, und es gibt einen Knoten $v_2 \in V$, der zu u_0 oder u_1 adjazent ist.

Falls v_2 in M nicht gematcht ist, beenden wir die Konstruktion, andernfalls fahren wir in obiger Weise fort und erreichen, wegen $|V| < \infty$, schließlich einen ungematchten Knoten $v_r \in V$. Damit haben wir aber wiederum einen augmentierenden Pfad $P = (v_r, u_{i_1}, v_{i_1}, \dots, u_{i_k}, v_{i_k}, u_0)$ (mit $i_1 > \dots > i_k$) gefunden! □

Definition 134

Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph. Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt **Träger** von G (engl. **vertex cover**), falls D mit jeder Kante in E mindestens einen Knoten gemeinsam hat (also „jede Kante bedeckt“).

Beobachtung: Sei D ein **Träger** von G und M ein **Matching** in G . Dann gilt offensichtlich

$$|D| \geq |M|,$$

da der **Träger** D jede Kante im **Matching** M treffen muss und die Kanten in M alle paarweise disjunkt sind.

Korollar 135

Seien D und M wie oben. Dann gilt

$$\min_D \{|D|\} \geq \max_M \{|M|\}.$$

Satz 136

Sei $G = (U, V, E)$ ein (ungerichteter) bipartiter Graph. Dann gilt

$$\min\{|D|; D \text{ Träger von } G\} = \max\{|M|; M \text{ Matching in } G\}$$

Beweis:

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Knoten in G $\text{Grad} \geq 1$ haben. Sei M ein maximum Matching in G , sei $A \subseteq U$ die von M gematchte Teilmenge von U , $B \subseteq V$ die von V .

Sei nun B' die Menge der Knoten in B , die von $U \setminus A$ aus mittels eines alternierenden Pfades erreichbar sind. Dann ist $B' \subseteq B$, da wir andernfalls einen augmentierenden Pfad gefunden haben. Sei A' die Menge der Knoten in A , die durch M mit Knoten in B' gematcht sind. Dann gibt es **keine** Kante zwischen A' und $V \setminus B$, da jede solche Kante wiederum zu einem augmentierenden Pfad führen würde.

Es gilt (i) $N(U \setminus A) \subseteq B'$, (ii) $N(A') = B'$, (iii) $N(V \setminus B) \subseteq A \setminus A'$. Damit ist $B' \cup (A \setminus A')$ ein Träger von G . Da $|A| = |M|$ und $|A'| = |B'|$, folgt die Behauptung. \square

Satz 137 (Berge (1957))

Ein Matching hat maximale Kardinalität genau dann, wenn es keinen augmentierenden Pfad dafür gibt.

Beweis:

s.u.



Lemma 138

Seien M, N Matchings in G , und sei $|N| > |M|$. Dann enthält $N \ominus M$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M .

Beweis:

Der Grad eines Knotens in $(V, N \ominus M)$ ist ≤ 2 . Die Zusammenhangskomponenten von $(V, N \ominus M)$ sind also

- 1 isolierte Knoten
- 2 einfache Kreise (gerader Länge)
- 3 alternierende Pfade

Seien C_1, \dots, C_r die Zusammenhangskomponenten in $(V, N \ominus M)$, dann gilt:

$$M \ominus \underbrace{C_1 \ominus C_2 \ominus \dots \ominus C_r}_{N \ominus M} = N$$

Nur die C_i 's, die **augmentierende Pfade** bzgl. M sind, vergrößern die Kardinalität des Matchings, und zwar jeweils um genau 1. Also muss es mindestens $|N| - |M|$ C_i 's geben, die augmentierende Pfade bzgl. M sind (und knotendisjunkt, da ZHKs).

Korollar 139

Satz von Berge

2. Kürzeste augmentierende Pfade

Lemma 140

Sei M ein Matching der Kardinalität r , und sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$, $s > r$. Dann gibt es einen augmentierenden Pfad bzgl. M der Länge $\leq 2 \left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor + 1$.

Beweis:

Sei N ein Matching maximaler Kardinalität in G , $|N| = s$. $N \ominus M$ enthält $\geq s - r$ augmentierende Pfade bzgl. M , die alle knotendisjunkt und damit auch kantendisjunkt sind. Mindestens einer dieser augmentierenden Pfade enthält daher $\leq \left\lfloor \frac{r}{s-r} \right\rfloor$ Kanten aus M . □

Lemma 141

Sei P ein kürzester augmentierender Pfad bzgl. M , und sei P' ein augmentierender Pfad bzgl. des neuen Matchings $M \ominus P$. Dann gilt:

$$|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$$

Beweis:

$N = M \ominus P \ominus P'$, also $|N| = |M| + 2$. Also enthält $M \ominus N$ mindestens 2 knotendisjunkte augmentierende Pfade bzgl. M , etwa P_1 und P_2 . Es gilt:

$$\begin{aligned}|N \ominus M| &= |P \ominus P'| \\ &= |(P - P') \cup (P' - P)| \\ &= |P| + |P'| - 2|P \cap P'| \\ &\geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|,\end{aligned}$$

also

$$|P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geq 2|P|,$$

also

$$|P'| \geq \underbrace{2|P| - |P|}_{|P|} + 2|P \cap P'|$$



Schema für Matching-Algorithmus:

- 1 Beginne mit Matching $M_0 := \emptyset$.
- 2 Berechne Folge $M_0, P_0, M_1, P_1, \dots, M_i, P_i, \dots$, wobei jeweils P_i ein **kürzester augmentierender Pfad** bzgl. M_i ist und

$$M_{i+1} := M_i \ominus P_i.$$

Im obigen Schema gilt

$$|P_{i+1}| \geq |P_i| \text{ für alle } i.$$

Lemma 142

Seien P_i und P_j in obiger Folge zwei augmentierende Pfade gleicher Länge. Dann sind P_i und P_j knotendisjunkt.

Beweis:

Annahme: es gibt eine Folge $(P_k)_{k \geq 0}$ mit $|P_i| = |P_j|$, $j > i$, $P_i \cap P_j \neq \emptyset$, $j - i$ minimal gewählt. Durch die Wahl von j sind die Pfade P_{i+1}, \dots, P_j knotendisjunkt. Also ist P_j auch ein augmentierender Pfad bzgl. $M' := M_{i+1}$, dem Matching nach den Augmentierungen mit P_0, P_1, \dots, P_i . Aus dem vorhergehenden Lemma folgt $|P_j| \geq |P_i| + 2|P_i \cap P_j|$, also P_i, P_j kantendisjunkt, da $|P_i| = |P_j|$. Da in M' jeder Knoten in P_i gematcht ist (und dies dann auch in $M' \ominus P_{i+1} \ominus P_{i+2} \ominus \dots \ominus P_{j-1}$ gilt), können auch P_i und P_j keinen Knoten gemeinsam haben. \square

Satz 143

Sei s die maximale Kardinalität eines Matchings in $G = (V, E)$. Dann enthält die Folge $|P_0|, |P_1|, \dots$ höchstens $\lfloor 2\sqrt{s} + 1 \rfloor$ verschiedene Werte.

Beweis:

Sei $r := \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ ($= s - \lceil \sqrt{s} \rceil$). Per Konstruktion ist $|M_i| = i$, also $|M_r| = r$. Mit Lemma 140 folgt

$$|P_r| \leq 2 \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leq 2 \left\lfloor \frac{s}{\sqrt{s}} \right\rfloor + 1 = 2 \lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1.$$

Für $i \leq r$ ist also $|P_i|$ eine der ungeraden Zahlen in $[1, 2\sqrt{s} + 1]$, also eine von $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ ungeraden Zahlen. P_{r+1}, \dots, P_{s-1} tragen höchstens $s - r - 1 < \sqrt{s}$ zusätzliche Längen bei. \square