Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2005
Merkblatt 2
1. März 2006

Diskrete Strukturen

Lösung linearer Rekursionsgleichungen

Das Merkblatt fasst die für eine konkrete Lösung von linearen Rekursionsgleichungen notwendigen Schritte zusammen und erläutert so den in der Vorlesung im Kapitel „Auflösung von Rekursionsgleichungen" vorgestellten Hauptsatz zur Lösung homogener linearer Rekursionsgleichungen. Die dann nachfolgende Lösung von inhomogenen Rekursionsgleichungen ist an eine Methode von Cauchy bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen angelehnt. Konkrete Anwendungsbeispiele finden Sie in den Übungsblättern.

Der zentrale Begriff bei der Lösung einer Rekursionsgleichung ist der Eigenwert als Nullstelle des sogenannten charakteristischen Polynoms der Rekursion. Die Lösungen lassen sich dann als Linearkombination von Elementen eines Fundamentalsystems von Lösungen darstellen, die diesen Eigenwerten zugeordnet werden können. Zusätzliche Bedingungen in der Form sogenannter Anfangsbedingungen werden erfüllt durch geeignete Wahl von Linearfaktoren des Lösungsfundamentalsystems. Dazu wird ein lineares Gleichungssystem für diese Koeffizienten angesetzt und gelöst.
Auch die erzeugende Funktion $A(z)$ der Lösungen von homogenen linearen Rekursionen ist in dem o. g. Hauptsatz der Vorlesung vollständig als geschlossener Ausdruck angegeben, und zwar als rationaler Ausdruck bzw. Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$. Dabei ist $q(z)$ das reflektierte Polynom des charakteristischen Polynoms, während sich $p(z)$ sofort aus dem Ansatz der vollständigen Rekursion ergibt.

Wir halten fest, dass die praktische Lösung homogener linearer Rekursionen keine Verwendung von erzeugenden Funktionen erfordert. Die Angabe einer Lösung und die Angabe eines geschlossenen Ausdrucks ihrer erzeugenden Funktion sind vollkommen entkoppelte Schritte, denen allerdings die Aufstellung des charakteristischen Polynoms gemeinsam ist. Dagegen werden zur Lösung inhomogener linearer Rekursionen regelmässig erzeugende Funktionen verwendet. Der interessierte Hörer wird bemerken, dass sich der Beweis des Hauptsatzes wesentlich auf erzeugende Funktionen stützt.

Die Lösungstheorie homogener linearer Rekursionsgleichungen ist weitgehend analog zur Lösungstheorie homogener linearer Differentialgleichungen. Beide Theorien tragen die Merkmale der Theorie linearer Operatoren, in der Eigenwerte und die zugeordneten Eigen- und Hauptvektoren eine zentrale Rolle spielen. Man kann nicht erwarten, diese Zusammenhänge bereits im ersten Semester zu verstehen. Wir wollen aber diese Zusammenhänge bereits jetzt benennen, um im Verlauf des Studiums darauf zurückkommen zu können.

Vorgehensweise bei der Lösung homogener linearer Rekursionen

Wir gehen aus von der homogenen, linearen Rekursiongleichung k-ter Ordnung für Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$

$$a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + q_k \cdot a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \tag{1}$$

mit konstanten Koeffizienten q_i.

Allgemeine Lösung

Zur Lösung der Gleichung (1) stellen wir das charakteristische Polynom $q(z)$ auf und bestimmen dessen Nullstellen.

$$q(z) = z^k + q_1 z^{k-1} + q_2 z^{k-2} + \ldots + q_k. \tag{2}$$

Die (i.a. komplexen) Nullstellen von $q(z)$ seien α_i mit Vielfachheit k_i für $i = 1, 2, \ldots, l$ und $\sum_{i=1}^{i=l} k_i = k$. Die Anzahl verschiedener Nullstellen sei also l. Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen, so zählt man k Nullstellen.
Wir können sofort die allgemeine Lösung h_n der Rekursion (1) angeben und verwenden dazu als Koeffizienten die Parameter $c_{i,j}$ für $i = 1, 2, \ldots, l$ und $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$. Es gilt

$$h_n = \sum_{i=1}^{l} p_i(n) \cdot {\alpha_i}^n \quad \forall n \geq 0 \tag{3}$$

mit

$$p_i(n) = \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} \cdot n^j = c_{i,0} + c_{i,1} \cdot n + \ldots + c_{i,k_i-1} \cdot n^{k_i-1}. \tag{4}$$

Spezielle Lösung

Spezielle Lösungen werden angegeben zur Erfüllung von Nebenbedingungen. Die allgemeine homogene Lösung h_n enthält k Parameter $c_{i,j}$ (siehe Formeln (3) und (4)). Nebenbedingungen

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots\ ,\ a_{k-1} = b_{k-1} \tag{5}$$

für Werte $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ erfüllt man durch Lösen der k (in den $c_{i,j}$ linearen) Gleichungen

$$h_0 = b_0, \quad h_1 = b_1,\ \ldots\ ,\ h_{k-1} = b_{k-1}. \tag{6}$$

Die spezielle homogene Lösung h_n, die die Gleichungen (6) erfüllt, bezeichnen wir mit $\bar{h}_n$. Die spezielle Lösung der Rekursion (1) mit den Nebenbedingungen (5) ergibt sich dann zu

$$a_n = \bar{h}_n \quad \forall n \geq 0.$$

Erzeugende Funktion einer speziellen Lösung

Die erzeugende Funktion $A(z)$ der speziellen Lösung a_n ist gleich der rationalen Funktion

$$A(z) = \frac{p(z)}{q^R(z)} \tag{7}$$

mit dem zum charakteristischen Polynom (2) reflektierten Polynom

$$q^R(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_k z^k \tag{8}$$

und einem Polynom $p(z)$, das sich wie folgt aus dem Ansatz der vollständigen Rekursion ergibt. Die vollständige Rekursionsgleichung beschreibt die Gleichung (1) zusammen mit den Nebenbedingungen (5) und ist wie folgt definiert.

$$a_n + q_1 \cdot a_{n-1} + \ldots + q_k \cdot a_{n-k} = d_0 \cdot \delta_{n,0} + d_1 \cdot \delta_{n,1} + \ldots + d_{k-1} \cdot \delta_{n,k-1} \quad \forall n \geq 0. \tag{9}$$

Dabei setzen wir $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Beachten Sie die bekannte Definition der Deltafunktion $\delta_{i,j}$ mit $\delta_{i,i} = 1$ für alle i und $\delta_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$. Die Parameter d_i sind mit Hilfe der Nebenbedingungen (5) durch folgende Gleichungen zu berechnen.

$$a_n + q_1 \cdot a_{n-1} + \ldots + q_k \cdot a_{n-k} = d_n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{10}$$

Das gesuchte Polynom $p(z)$ ist nun gegeben durch

$$p(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots + d_{k-1} z^{k-1}. \tag{11}$$

Vorgehensweise bei der Lösung inhomogener Rekursionen

Wir gehen aus von einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung k-ter Ordnung für Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$

$$a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + q_k \cdot a_n = s_n \quad \forall n \geq 0 \tag{12}$$

mit konstanten Koeffizienten q_i und inhomogenem Anteil (Störglied) s_n.

Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung erfolgt in 2 Schritten.

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung h_n der zugeordneten homogenen Gleichung (i.e. die gegebene Gleichung (12), allerdings mit $s_n = 0$ als rechte Seite).

2. Bestimmung einer partikulären Lösung p_n der inhomogenen Gleichung (12) mit den speziellen Nebenbedingungen $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, … , $a_{k-1} = 0$.

Die allgemeine Lösung a_n der inhomogenen Rekursionsgleichung (12) ergibt sich dann zu

$$a_n = h_n + p_n \quad \forall n \geq 0.$$

Zum ersten Schritt wurde bereits alles Wesentliche gesagt. Wir betrachten nun die Konstruktion einer partikulären Lösung.

Sei $q^R(z)$ das zum charakteristischen Polynom $q(z)$ reflektierte Polynom einer linearen Rekursion (1), d. h.

$$q^R(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_k z^k.$$

Die partikuläre Lösung p_n von (12) mit annullierenden Anfangsbedingungen $p_0 = 0$, $p_1 = 0, \ldots, p_{k-1} = 0$ ist stets gegeben durch deren erzeugende Funktion $P(z)$ mit

$$P(z) = \frac{z^k \cdot \sum_{n \geq 0} s_n z^n}{q^R(z)}.$$

Falls nun s_n eine rationale erzeugende Funktion besitzt, kann man durch Partialbruchzerlegung von $P(z)$ geschlossene Formeln der partikulären Lösung p_n berechnen. Man benötigt dazu u. a. die Zerlegung der Nennerfunktion $q^R(z)$ in Linearfaktoren. Diese Linearfaktoren ergeben sich aber unmittelbar aus den Nullstellen α_i des charakteristischen Polynoms $q(z)$. Es gilt

$$q^R(z) = (1 - \alpha_1 z)^{k_1} (1 - \alpha_2 z)^{k_2} \ldots (1 - \alpha_l z)^{k_l}. \tag{13}$$

Spezielle Lösung

Die allgemeine homogene Lösung h_n enthält k Parameter $c_{i,j}$. Nebenbedingungen

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots\ ,\ a_{k-1} = b_{k-1} \tag{14}$$

für Werte $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ erfüllt man durch Lösen der k (in den $c_{i,j}$ linearen) Gleichungen

$$h_0 = b_0, \quad h_1 = b_1,\ \ldots\ ,\ h_{k-1} = b_{k-1}. \tag{15}$$

Die spezielle homogene Lösung h_n, die die Gleichungen (15) erfüllt, bezeichnen wir mit $\bar{h}_n$. Die spezielle Lösung der Rekursion (12) mit den Nebenbedingungen (14) ergibt sich dann zu

$$a_n = \bar{h}_n + p_n \quad \forall n \geq 0.$$