WS 2005/06

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2005WS/ds/index.html.de

28. Oktober 2005

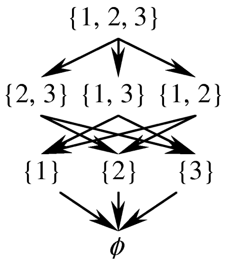
4.4 Partielle Ordnungen

Sei $(S, \preceq)$ eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A),\ \preceq \equiv \subseteq,\ A = \{1, 2, 3\}$

Hassediagramm:



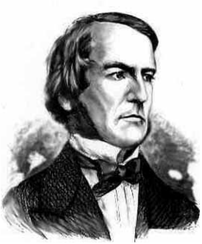
Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen vergleichbar (bzgl. $\preceq$), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst unvergleichbar.
- Ein Element $a \in S$ heißt minimal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt maximal, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt linear oder vollständig, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält $\big($z. B. $(\mathbb{N}_0, \leq)\big)$.

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und“, „oder“, oder der Negation.

Der Boolesche Aussagenkalkül stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

more on George Boole

Wir betrachten nun die Menge {t,f} (manchmal auch $\{1, 0\}$ oder $\{0, 1\}$ oder $\{1, -1\}$), deren Elemente für *true* und *false* stehen.

(Unäre und) binäre Verknüpfungen boolescher Werte

			$\vee$	$\Leftarrow$		$\Rightarrow$		$\equiv$ $=$	$\wedge$	$nand$	$\not\equiv$ $\neq$					nor	
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	f	f	f	f	f	f	f	f
t	f	t	t	t	t	f	f	f	f	t	t	t	t	f	f	f	f
f	t	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f

Bemerkungen:

1. Die Bedeutung von $\equiv$ (und damit $\not\equiv$) ist klar. $\equiv$ wird oft, vor allem in Beweisen, auch als

$$\Leftrightarrow$$

geschrieben (im Englischen: iff, if and only if).

2. Für zwei boolesche Aussagen A und B ist $A \Rightarrow B$ falsch genau dann wenn $A = t$ und $B = f$.
3. $A \Rightarrow B$ ist damit äquivalent mit $\neg A \vee B$.
4. $A \Rightarrow B$ ist damit auch äquivalent mit $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Wichtige Beobachtung:

Gilt also (oder beweisen wir korrekt) $A \Rightarrow f$ (also: „aus der Bedingung/Annahme A folgt ein Widerspruch“), so ist A falsch!

4.6 Beweistechniken

Die meisten mathematischen Behauptungen sind von der Form

$$A \Rightarrow B \text{ bzw. } A_1, \ldots, A_k \Rightarrow B\,.$$

Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir zeigen:

1. Unter der Annahme A können wir B zeigen (direkter Beweis).
2. Unter der Annahme $\neg B$ können wir $\neg A$ zeigen (indirekter Beweis).
3. Unter der Annahme $\neg B$ können wir einen Widerspruch zeigen (Widerspruchsbeweis).

Beispiel 19 (Direkter Beweis)

Satz 20

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

$n \in \mathbb{N}_0$ ungerade $\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0)\,[n = 2m+1] \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = \underbrace{\underbrace{4m^2 + 4m}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}} \Rightarrow n^2$ ungerade. $\square$

Beispiel 21 (Indirekter Beweis)

Satz 22

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:

Die Aussage ist gleichbedeutend mit „Falls $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade."

Diese Aussage wurde in Satz 20 bewiesen. $\square$

Beispiel 23 (Beweis durch Widerspruch)

Wir nehmen an, dass die zu zeigende Aussage falsch ist und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Satz 24

$\sqrt{3}$ ist irrational, d. h. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Beweis:

Widerspruchsannahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \mathrm{ggT}(p, q) = 1 \quad \textbf{(*)} \\
&\Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0)\,[p = 3k] \\
&\Rightarrow 3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|q \Rightarrow 3|\,\mathrm{ggT}(p, q)
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu **(*)**. □

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Wir zeigen zunächst den Induktionsanfang, also $P(0)$, und folgern dann aus der Induktionsvoraussetzung, also der Annahme $P(n)$ bzw. den Annahmen $P(0), P(1), \ldots, P(n)$, die Behauptung $P(n+1)$.

Beispiel 25

Satz 26

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 0$ trivial $0 = 0$

Induktionsannahme: $P(n)$, also Satz richtig für n

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i \ + n + 1 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 =$$
$$= \frac{2 \cdot (n+1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dies ist $P(n+1)$, die Behauptung für $n + 1$. $\square$

Das Schubfachprinzip (*pigeon hole principle*)

Satz 27

Sei $f : X \to Y$*, sei* $\infty > |X| > |Y| \geq 1$*, dann*

$$(\exists y \in Y)\big[|f^{-1}(y)| \geq 2\big]$$

Beweis:

Sei $|X| = n, |Y| = m$, damit $n > m$. Widerspruchsannahme: Kein $y \in Y$ hat mehr als ein Urbild in X. Die Bilder der ersten m Elemente aus X müssen dann notwendigerweise verschieden sein. Damit hat jedes $y \in Y$ ein Urbild in X. Da f total ist, muss das Bild des $(m+1)$-ten Elements aus X dann als Bild ein Element aus Y haben, das bereits Bild eines anderen $x \in X$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

Beispiele:

– Seien 13 oder mehr Personen in einem Raum. Dann haben mindestens 2 der Personen im gleichen Monat Geburtstag.

– Behauptung: In jeder Menge P von Personen ($|P| \geq 2$) gibt es immer mindestens 2 Personen, die gleich viele (andere) Personen in der Menge kennen („kennen“ symmetrische Relation).

Beweis:

1. Überlegung: Sei $n = |P|$. Wir betrachten die Abbildung $P \ni p \mapsto \#$ Personen, die p kennt $\in \{0, \ldots, n-1\}$
2. Weitere Überlegung:
    1. 0 kommt als Bild nicht vor (jeder kennt mindestens eine andere Person).
       $\Rightarrow$ $|\text{Urbildmenge}| = n > |\text{Bildmenge}| = n - 1$. Das Schubfachprinzip liefert die Behauptung.
    2. 0 kommt als Bild vor.
       $\Rightarrow$ Es gibt also (wegen der Symmetrie) mindestens eine Person, die kein anderer kennt. Also ist der Wertebereich der Funktion $\subseteq \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Das Schubfachprinzip liefert nunmehr ebenfalls den Beweis.

$\square$

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Satz 28

Sei $f : X \to Y, \infty > |X| \geq |Y| \geq 1$*. Dann existiert ein* $y \in Y$*, so dass*

$$\left|f^{-1}(y)\right| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil \,.$$

Beweis:

Es gilt $|X| = \left|\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)\right| = \sum_{y \in Y} \left|f^{-1}(y)\right|$. Das zweite „$=$“ gilt, da die $f^{-1}(y)$ alle paarweise disjunkt sind!

Widerspruchsannahme:

$$(\forall y \in Y)\left[\left|f^{-1}(y)\right| \le \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1\right]$$

Da

$$\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \le \frac{|X| + |Y| - 1}{|Y|} - 1 = \frac{|X| - 1}{|Y|}$$

folgt mit der Widerspruchsannahme

$$|X| = \sum_{y \in Y} \left|f^{-1}(y)\right| \le |Y| \cdot \frac{|X| - 1}{|Y|} = |X| - 1$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. □