9.4.4 Korollar/Def. Sei $(1) \neq I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist die affine Hilbertfunktion ${}^a\mathrm{HF}_I(s)$ für $s \gg 0$ ein Polynom in s mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$; es heißt das *affine Hilbertpolynom* von I, i.Z. ${}^a\mathrm{HP}_I$.

9.4.5 Korollar. Sei $(1) \neq I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal, $<$ eine Grad-kompatible, monomiale Ordnung. Dann gilt

$$ {}^a\mathrm{HP}_I = {}^a\mathrm{HP}_{(\mathrm{LT}(I))}. $$

Beweis: 9.4.3. und 9.4.2. $\square$

9.4.6 Lemma. Seien $(1) \neq I, J \subset k[X_1, \dots, X_n]$ Ideale mit $I \subset J$. Dann ist

$$ \deg {}^a\mathrm{HP}_J \leq \deg {}^a\mathrm{HP}_I. $$

Beweis: Zunächst seien I, J monomiale Ideale. Aus $I \subset J$ folgt $C(J) \subset C(I)$, und somit gilt ${}^a\mathrm{HF}_J(s) = \chi_J(s) \leq \chi_I(s) = {}^a\mathrm{HF}_I(s)$ für alle $s \geq 0$. Für alle $s \gg 0$ gilt dann ${}^a\mathrm{HP}_J(s) \leq {}^a\mathrm{HP}_I(s)$ und es folgt die Behauptung mit folgendem Hilfssatz. $\square$

9.4.7 Hilfssatz. Seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ reelle Polynome mit positiven Leitkoeffizienten. Gilt dann $P(s) \leq Q(s)$ für $s \gg 0$, so folgt $\deg P \leq \deg Q$.

Beweis: Sei $n = \deg(P)$. Angenommen, es gilt $n > \deg(Q)$. Dann ist $\lim_{s\to\infty} P(s)/s^n = a$, wobei $a > 0$ der Leitkoeffizient von P ist, und $\lim_{s\to\infty} Q(s)/s^n = 0$ wegen $n > \deg(Q)$. Aus $P(s) \leq Q(s)$ für $s \gg 0$ folgt sofort $P(s)/s^n \leq Q(s)/s^n$ für $s \gg 0$, und im Limes $s \to \infty$ erhält man dann $a \leq 0$, Widerspruch. $\square$

9.4.8 Satz. Sei $(1) \neq I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann gilt

$$ \deg {}^a\mathrm{HP}_{\sqrt{I}} = \deg {}^a\mathrm{HP}_I. $$

Beweis: Sei I zunächst ein monomiales Ideal. Dann gilt $\dim V(I) = \deg {}^a\mathrm{HP}_I$ nach Korollar 9.4.2. Andererseits ist auch $\sqrt{I}$ ein monomiales Ideal und es gilt somit $\dim V(\sqrt{I}) = \deg {}^a\mathrm{HP}_{\sqrt{I}}$. Wegen $V(I) = V(\sqrt{I})$ folgt sofort die Behauptung.

Sei nun $I \neq (1)$ ein beliebiges Ideal. Weiterhin sei $<$ eine Grad-kompatible, monomiale Ordnung.

Beh.: $(\mathrm{LT}(I)) \subset (\mathrm{LT}(\sqrt{I})) \subset \sqrt{(\mathrm{LT}(I))}$.

Aus $I \subset \sqrt{I}$ folgt sofort $(\mathrm{LT}(I)) \subset (\mathrm{LT}(\sqrt{I}))$. Für die zweite Inklusion genügt es $\mathbb{M}_n \cap (\mathrm{LT}(\sqrt{I})) \subset \sqrt{(\mathrm{LT}(I))}$ zu zeigen, da $(\mathrm{LT}(\sqrt{I}))$ ein monomiales Ideal ist. Sei demnach ein Monom $M \in (\mathrm{LT}(\sqrt{I}))$ gegeben. Dann wird M von einem $\mathrm{LM}(g)$, $g \in \sqrt{I}$, geteilt. Somit existiert ein Multi-Index α mit $M = X^\alpha \,\mathrm{LM}(g) = \mathrm{LM}(f)$, wobei $f = X^\alpha g \in \sqrt{I}$. Wähle r mit $f^r \in I$. Dann ist $\mathrm{LM}(f^r) = \mathrm{LM}(f)^r = M^r$, d.h. $M^r \in (\mathrm{LT}(I))$, also $M \in \sqrt{(LT(I))}$. Damit ist obige Begauptung gezeigt.

Nach obiger Behauptung und Lemma 9.4.6 gilt nun

$$ \deg {}^a\mathrm{HP}_{\sqrt{(\mathrm{LT}(I))}} \leq \deg {}^a\mathrm{HP}_{(\mathrm{LT}(\sqrt{I}))} \leq \deg {}^a\mathrm{HP}_{(\mathrm{LT}(I))}. $$

Nun gilt $\deg {}^a\mathrm{HP}_{\sqrt{(\mathrm{LT}(I))}} = \deg {}^a\mathrm{HP}_{(LT(I))}$, da wir 9.4.8 bereits für monomiale Ideale bewiesen haben und es folgt $\deg {}^a\mathrm{HP}_{\mathrm{LT}(\sqrt{I})} = \deg {}^a\mathrm{HP}_{(\mathrm{LT}(I))}$. Da die monomiale Ordnung $<$ Grad-kompatibel ist, folgt mit Korollar 9.4.5 die Behauptung des Satzes. $\square$

9.4.9 Theorem. Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine irreduzible, affine algebraische Menge, $k(V)$ der Funktionenkörper von V und $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal mit $V = V(I)$. Dann ist

$$\deg {}^a\mathrm{HP}_I = \operatorname{trdeg}_k k(V).$$

Beweis: Wegen 9.4.8 gelte o.E. $I = \sqrt{I}(= I(V))$. Sei $e = \deg {}^a\mathrm{HP}_I$. Nach Korollar 9.4.5 gilt dann auch $e = \deg {}^a\mathrm{HP}_{(\mathrm{LT}(I))}$. Nach Korollar 9.4.2 ist dann $e = \dim(W)$ mit $W = V(\mathrm{LT}(I))$. Nach 9.1.3 (oder 9.3.6) gibt es $A \subset \{1, \ldots, n\}$, $|A| = e$, so dass die Familie $(x_i \mod (\mathrm{LT}(I)) : i \in A)$ algebraisch unabhängig über k ist. O.E. sei $A = \{1, \ldots, e\}$. Es gilt somit $(\mathrm{LT}(I)) \cap k[X_1, \ldots, X_e] = \{0\}$. Dann gilt aber auch $I \cap k[X_1, \ldots, X_e] = \{0\}$, denn ist $f \neq 0$, so ist auch $\mathrm{LT}(f) \neq 0$. Somit ist die Familie $(x_i \mod I : 1 \leq i \leq e)$ algebraisch unabhängig über k und es folgt $e \leq \operatorname{trdeg}_k k(V)$.

Andererseits sei $d = \operatorname{trdeg}_k k(V)$. Dann gibt es $A \subset \{1, \ldots, n\}$, $|A| = d$, so dass die Familie $(x_i \mod I : i \in A)$ algebraisch unabhängig über k ist. O.E. sei $A = \{1, \ldots, d\}$. Dann gilt $I \cap k[X_1, \ldots, X_d] = \{0\}$. Betrachte die k-lineare Abbildung (für festes s)

$$\phi : k[X_1, \ldots, X_d]_{\leq s} \to k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s}, \quad f \mapsto f \mod I_{\leq s}.$$

Die Abbildung ϕ ist injektiv, denn aus $\phi(f) = 0$ folgt $f \in I \cap k[X_1, \ldots, X_d]$, also $f = 0$. Somit gilt für die Dimensionen der k-Vektorräume:

$$\dim_k k[X_1, \ldots, X_d]_{\leq s} \leq \dim_k k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq s}/I_{\leq s} = {}^a\mathrm{HF}_I(s).$$

Da $\{X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} : |\alpha| \leq s\}$ eine k-Basis von $k[X_1, \ldots, X_d]_{\leq s}$ ist, folgt

$$\binom{s+d}{d} \leq {}^a\mathrm{HF}_I(s)$$

nach Lemma 9.3.5. Da $\binom{s+d}{d}$ ein Polynom in s vom Grad d mit positivem Leitkoeffizienten ist, folgt $d \leq \deg {}^a\mathrm{HP}_I$ nach Hilfssatz 9.4.7. $\square$

9.4.10 Korollar. Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine irreduzible, affine algebraische Menge, $k(V)$ der Funktionenkörper von V und $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal mit $V = V(I)$. Dann ist

$$\deg {}^a\mathrm{HP}_I = \dim(V).$$

Beweis: 9.4.9 und 9.1.3. $\square$

Wir betrachten nun homogene Ideale und projektive algebraische Mengen. Für jedes $s \in \mathbb{N}_0$ sei

$$k[X_0, \ldots, X_n]_s = \{f \in k[X_0, \ldots, X_n] : f \text{ homogen}, \deg(f) = s\} \cup \{0\}$$

und für jedes homogene Ideal $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ sei

$$I_s = I \cap k[X_0, \ldots, X_n]_s.$$

Bemerkung. $k[X_0, \dots, X_n]$ ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum der Dimension $\binom{s+n}{n}$; k-Basis ist $\{X^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1},\ |\alpha| = s\}$. I_s ist ein Untervektorraum von $k[X_0, \dots, X_n]_s$.

Definition. Sei $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann heißt die Abbildung $\mathrm{HF}_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$\mathrm{HF}_I(s) = \dim_k k[X_0, \dots, X_n]_s / I_s,$$

die *Hilbertfunktion* von I.

Bemerkung. Es gilt $\mathrm{HF}_I(s) = \binom{n+s}{n} - \dim_k I_s$ für alle $s \geq 0$.

9.4.11 Satz. Sei $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal, $<$ eine (beliebige) monomiale Ordnung. Dann gilt

$$\mathrm{HF}_I(s) = \mathrm{HF}_{(\mathrm{LT}(I))}(s)$$

für alle $s \geq 0$.

Beweis: Analog zum Beweis von 9.4.3, nur dass hier anstelle der Grad-Kompatibilität der monomialen Ordnung die Homogenität des Ideals benutzt wird. □

9.4.12 Lemma. Sei $(1) \neq I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein monomiales Ideal. Dann gilt

$$\mathrm{HF}_I(s) = \chi_I(s) - \chi_I(s-1)$$

für alle $s > 0$, wobei $\chi_I(s) = \#\{\alpha \in C(I) : |\alpha| \leq s\}$ die Zählfunktion aus Paragraph 3 ist. Insbesondere ist $\mathrm{HF}_I(s)$ für $s \gg 0$ ein Polynom in s vom Grad $d-1$, $d = \dim V(I)$ ($V(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$) mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, wobei der Leitkoeffizient positiv ist.

Beweis: Wie im Beweis von 9.4.1 zeigt man, dass $\{X^\alpha \mod I_s : \alpha \in C(I),\ |\alpha| = s\}$ eine k-Basis von $k[X_0, \dots, X_n]_s / I_s$ ist. Somit gilt $\mathrm{HF}_I(s) = \#\{\alpha \in C(I) : |\alpha| = s\} = \chi_I(s) - \chi_I(s-1)$. Nach Theorem 9.3.12 ist $\chi_I(s)$ für $s \gg 0$ ein Polynom $P(s)$ vom Grad $d = \dim V(I)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, wobei der Leitkoeffizient positiv ist. Für $s \gg 0$ gilt somit $\mathrm{HF}_I(s) = P(s) - P(s-1)$. Schreibt man $P(s) = a_0 s^d + a_1 s^{d-1} + \cdots + a_d$ mit $a_0 > 0$, so gilt

$$P(s) - P(s-1) = a_0 s^{d-1} + \text{Terme vom Grad} < d-1 \text{ in s.}$$

□

9.4.13 Satz. Sei $(1) \neq I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann gilt

$$\mathrm{HF}_I(s) = {}^a\mathrm{HF}_I(s) - {}^a\mathrm{HF}_I(s-1)$$

für alle $s > 0$.

Beweis: Nach Lemma 9.4.12 und Satz 9.4.1 gilt die Behauptung, falls I ein monomiales Ideal ist. Der allgemeine Fall folgt aber dann sofort mit Hilfe von Satz 9.4.11. □

9.4.14 Korollar/Def. Sei $(1) \neq I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann ist die Hilbertfunktion $\mathrm{HF}_I(s)$ für $s \gg 0$ ein Polynom in s mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$; es heißt das *Hilbertpolynom* von I, i.Z. HP_I.

9.4.15 Korollar. Sei $(1) \neq I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann gilt

$$\mathrm{HP}_I(s) = {}^a\mathrm{HP}_I(s) - {}^a\mathrm{HP}_I(s-1)$$

für alle s. Insbesondere gilt

$$\deg \mathrm{HP}_I = \deg {}^a\mathrm{HP}_I - 1,$$

und HP_I und ${}^a\mathrm{HP}_I$ haben denselben Leitkoeffizienten.

Beweis: Nach 9.4.13 gilt $\mathrm{HP}_I(s) = {}^a\mathrm{HP}_I(s) - {}^a\mathrm{HP}_I(s-1)$ für alle $s \gg 0$. Da Polynome auf einer unendlichen Menge von Punkten eindeutig bestimmt sind, folgt die erste Behauptung; die zweite folgt wie im Beweis von Lemma 9.4.12. $\square$

9.4.16 Korollar. Sei $(1) \neq I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann ist auch $\sqrt{I}$ ein homogenes Ideal und es gilt

$$\deg \mathrm{HP}_{\sqrt{I}} = \deg \mathrm{HP}_I\,.$$

Beweis: 9.4.15 und 9.4.8. $\square$

9.4.17 Satz. Sei $(1) \neq I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ein (beliebiges) Ideal und $I^h \subset k[X_0, \dots, X_1]$ bezeichne die Homogenisierung von I (bzgl. X_0). Dann gilt

$${}^a\mathrm{HF}_I(s) = \mathrm{HF}_{I^h}(s)$$

für alle $s \geq 0$. Insbesondere ist ${}^a\mathrm{HP}_I = \mathrm{HP}_{I^h}$.

Beweis: Für festes s betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi : k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s} &\to K[X_0, \dots, X_n]_s, \quad f \mapsto X_0^s f(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0), \\ \psi : k[X_0, \dots, X_n]_s &\to k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}. \quad F \mapsto F(1, X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt: Hat $f \in k[X_1, \dots, X_n]_{\leq s}$ (Total-)Grad $d = \deg(f) \leq s$, so ist $\phi(f) = X_0^{s-d} f^h$, wobei f^h die Homogenisierung von f (bzgl. X_0) ist; und $\psi(F) = F^a$ ist die Dehomogenisierung von F. Man überprüft nun leicht (siehe auch Satz 8.2.1), dass ϕ und ψ wohldefinierte, k-lineare Abbildungen sind und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ gilt, d.h. ϕ und ψ sind zueinander inverse Isomorphismen (von Vektorräumen). Per Konstruktion von ϕ gilt offensichtlich $\phi(I_{\leq s}) \subset I^h_s$. Da ϕ injektiv ist, folgt daraus $\dim_k I_{\leq s} \leq \dim_k I^h_s$. Andererseits gilt $\psi(I^h_s) \subset I_{\leq s}$, denn $(I^h)^a \subset I$, und es folgt $\dim_k I^h_s \leq \dim_k I_{\leq s}$ wegen der Injektivität von ψ. Insgesamt gilt nun

$$\begin{aligned} {}^a\mathrm{HF}_I(s) &= \dim_k k_[X_1, \dots, X_n]_{\leq s} - \dim_k I_{\leq s} \\ &= \dim_k k_[X_0, \dots, X_n]_s - \dim_k I^h_s \\ &= \mathrm{HF}_{I^h}(s). \end{aligned}$$

$\square$

9.4.18 Theorem. Sei $V \subset \mathbb{P}^n$ eine irreduzible, projektive algebraische Menge, $k(V)$ der Funktionenkörper von V und $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal mit $V = V_+(I)$. Dann ist

$$\deg \mathrm{HP}_I = \operatorname{trdeg}_k k(V).$$

Beweis: O.E. sei $I = I_+(V)$, d.h. $I = \sqrt{I}$ (vgl. 9.4.16). Betrachte die Überdeckung von $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ durch affine $U_i = \{x_i \neq 0\}$. Wegen $V \neq \emptyset$ gelte o.E. $V_0 := V \cap U_0 \neq \emptyset$. Da V_0 offen in V, und V irreduzibel ist, gilt $V = \overline{V_0}$ (vgl. 8.3.2). Sei $I_0 = I(V_0) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Nach 8.2.2 (i) ist $I = I_0^h$, die Homogenisierung von I_0. Da nach Satz 9.2.3 die Funktionenkörper $k(V_0)$ und $k(\overline{V_0}) = k(V)$ isomorph sind, folgt $\operatorname{trdeg}_k k(V_0) = \operatorname{trdeg}_k k(V)$. Andererseits gilt nach 9.4.17 $\deg {}^a\mathrm{HP}_{I_0} = \deg \mathrm{HP}_{I_0^h}$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Theorem 9.4.9. □

9.4.19 Korollar. Sei $V \subset \mathbb{P}^n$ eine irreduzible, projektive algebraische Menge und $I \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal mit $V = V_+(I)$. Dann gilt

$$\deg \mathrm{HP}_I = \dim(V).$$

Beweis: 9.4.18 und 9.2.2. □