
Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1

Beim Testen von Hypothesen bezeichnet man die zu überprüfende Hypothese (*Nullhypothese*) generell mit H_0 und die *Alternative* mit H_1 . Ein Tierhändler erhält ein Paket mit 100 Frettchen. Er will testen, ob weniger als zehn (< 10) dieser Frettchen aggressiv und bissig sind. Dazu hält er zehn Frettchen seinen Finger hin und nimmt das Paket nur an, wenn ihn keins davon beißt (wir nehmen an, dass ein aggressives Frettchen sofort zubeißen würde). Wie lauten die Hypothesen des Händlers? Was ist das Niveau des Tests?

Aufgabe 2

In einer großen Stadt gibt es N Taxis, die mit den Nummern $1, \dots, N$ beschriftet sind. Wir stehen an der Straße und beobachten die Taxis, dabei notieren wir uns deren Nummer. (Wiederholungen werden ignoriert). Sei x_1, \dots, x_n die aufsteigend sortierte Folge der beobachteten Nummern. Nun wollen wir die Anzahl N der Taxis schätzen.

- Was ist der Maximum Likelihood Schätzer für N ? Ist dieser erwartungstreu?
- Geben Sie einen Schätzer für die Anzahl der Taxis an, der N dadurch abschätzt, dass er versucht, die Größe der nicht beobachteten Lücke $x_n + 1, \dots, N$ oberhalb von x_n abzuschätzen.

Aufgabe 3

Sei X die Anzahl der Unfälle in einer Stadt pro Woche und Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wir wollen aus der Beobachtung von X die Wahrscheinlichkeit ableiten, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht (also $(\Pr[X = 0])^3$). Zeigen Sie: Ist dieser Schätzer erwartungstreu, dann liefert er unsinnige Schätzwerte!

(Hinweis: $\sum_{i=0}^{\infty} k^i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = e^{k \cdot \lambda}$ kann dazu verwendet werden, k zu bestimmen.)

Aufgabe 4

Gegeben eine Markovkette mit Zustandsmenge $\{\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}\}$, $p_{n(n+1)} = 2/3$ und $p_{n0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

Aufgabe 5

Zwei Zustände A und B einer Markovkette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .3 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & 0 & .9 & 0 \\ .25 & .25 & 0 & 0 & .25 & .25 \\ 0 & 0 & .7 & 0 & .3 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & .2 & .2 & .4 \end{pmatrix};$$

welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient? Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu befinden?