

SS 2004

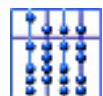
Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik

TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de>



Exponentiation von Matrizen

Wenn P diagonalisierbar ist, so existiert eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B , so dass $P = B \cdot D \cdot B^{-1}$ gilt.

Diese erhalten wir durch Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von P und durch Transformation von P in den Raum der Eigenvektoren.

Dann gilt

$$P^k = B \cdot D^k \cdot B^{-1} .$$



Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix $(P - \lambda \cdot I)$ erhalten wir die Eigenwerte $0,7$ und 1 , sowie die zugehörigen (rechten) Eigenvektoren

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

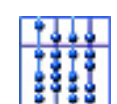


Damit

$$D = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

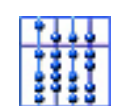
und

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$



Damit ergibt sich beispielsweise

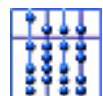
$$P^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,562 & 0,438 \\ 0,219 & 0,781 \end{pmatrix}$$



4.2.3 Ankunfts­wahrscheinlichkeiten und Übergangszeiten

Bei der Analyse von Markov-Ketten treten oftmals Fragestellungen auf, die sich auf zwei bestimmte Zustände i und j beziehen:

- Wie wahrscheinlich ist es, irgendwann von i nach j zu kommen?
- Wie viele Schritte benötigt die Kette im Mittel, um von i nach j zu gelangen?



Definition: Die Zufallsvariable

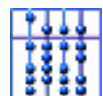
$$T_{ij} := \min\{n \geq 1 \mid X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\}$$

zählt die Anzahl der Schritte, die von der Markov-Kette für den Weg von i nach j benötigt werden. T_{ij} nennen wir die **Übergangszeit** (engl. **hitting time**) vom Zustand i zum Zustand j . Wenn j nie erreicht wird, setzen wir $T_{ij} = \infty$.

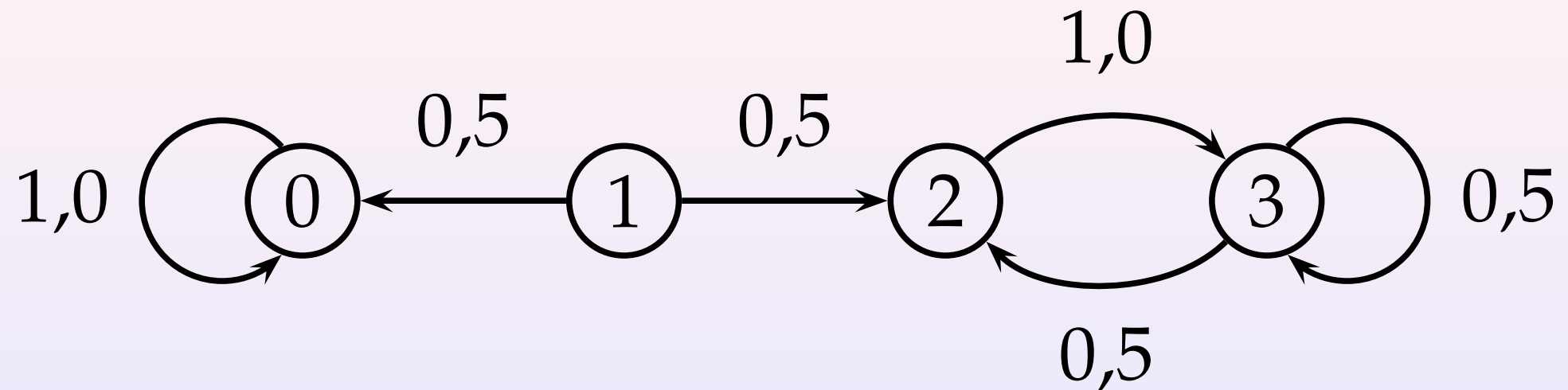
Ferner definieren wir $h_{ij} := \mathbb{E}[T_{ij}]$.

Die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand i nach beliebig vielen Schritten in den Zustand j zu gelangen, nennen wir **Ankunftswahrscheinlichkeit** f_{ij} . Formal definieren wir

$$f_{ij} := \Pr[T_{ij} < \infty].$$



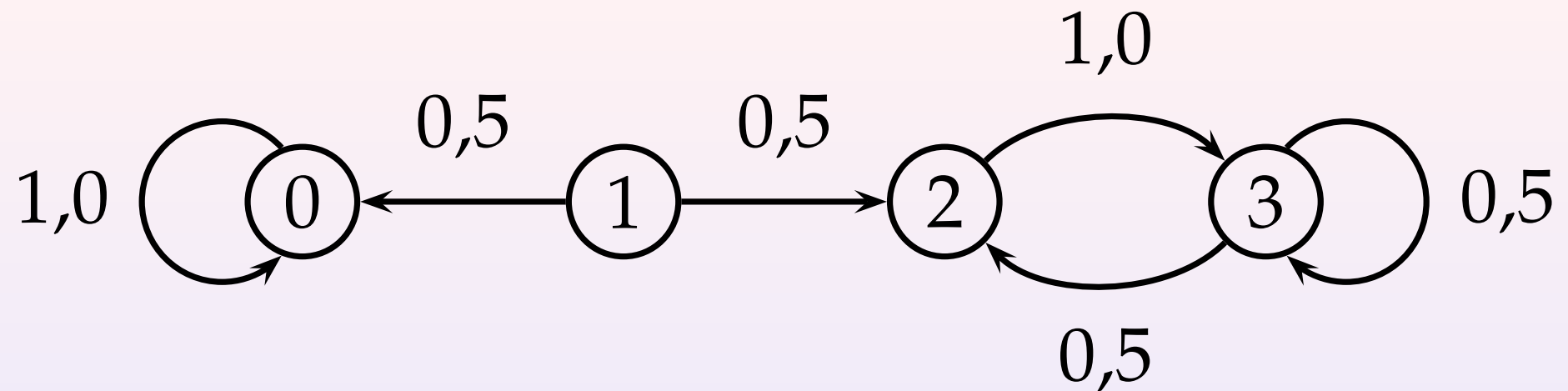
Beispiel:



Beispiel zur Berechnung von f_{ij} und h_{ij}

Wir betrachten die obige Markov-Kette. Einige Besonderheiten fallen sofort auf:

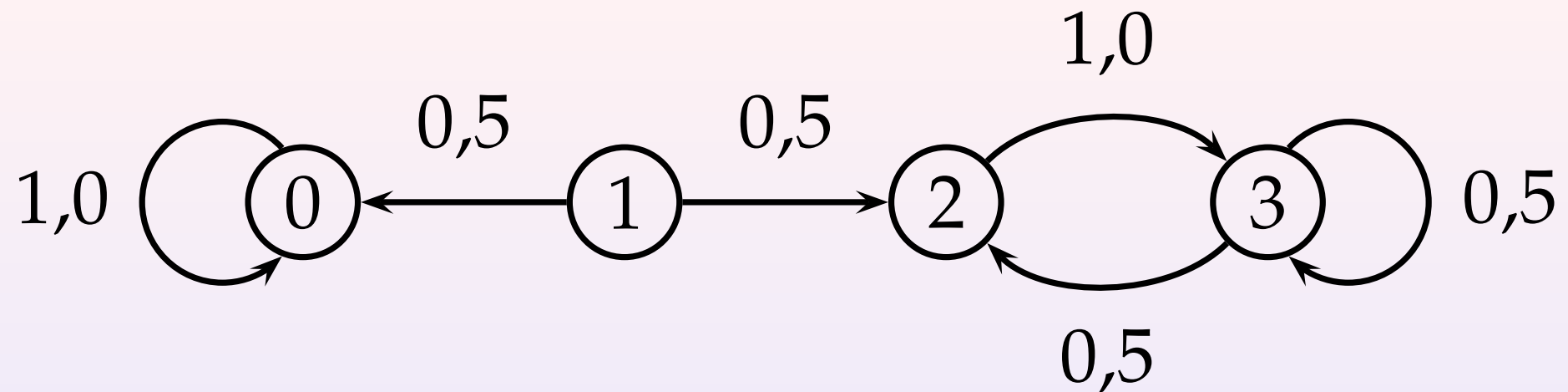
- Beginnt man im Zustand **0**, so kann man niemals einen der übrigen Zustände erreichen. Die Übergangszeiten T_{01} , T_{02} und T_{03} sind daher ∞ .



- Beginnt man im Zustand **1**, so entscheidet sich im ersten Schritt, ob die Kette sich zukünftig im „linken Teil“ (Zustand **0**) oder im „rechten Teil“ (Zustand **2** und **3**) aufhält. Für die Übergangszeit T_{10} gilt daher

$$T_{10} = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_1 = 0, \\ \infty & \text{falls } X_1 = 2. \end{cases}$$

Wegen $\Pr[X_1 = 0 \mid X_0 = 1] = 0,5$ folgt $f_{10} = 0,5$ und $\mathbb{E}[T_{10}] = \infty$.



- Beginnt man im Zustand **2** oder **3**, so wird die Kette auch weiterhin zwischen der Zuständen **2** und **3** „hin und her pendeln“. Genauer:
Die Anzahl der Schritte, in denen die Kette im Zustand 3 bleibt, ist geometrisch verteilt mit Parameter **0,5**. Der Zustand 3 wird daher im Mittel nach $1/0,5 = 2$ Schritten verlassen. Da Zustand 2 der einzige Nachbar von 3 ist, folgt $h_{32} = 2$ und somit insbesondere auch $f_{32} = 1$.

Lemma 48:

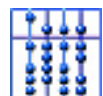
Für die erwarteten Übergangszeiten gilt

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \text{ für alle } i, j \in S,$$

sofern die Erwartungswerte h_{ij} und h_{kj} existieren.

Für die Ankunfts wahrscheinlichkeiten gilt analog

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \text{ für alle } i, j \in S.$$



Beweis: Wir bedingen auf das Ergebnis des ersten Schritts der Markov-Kette und erhalten aufgrund der Gedächtnislosigkeit

$\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k] = \Pr[T_{kj} < \infty]$ für $k \neq j$ sowie

$\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = j] = 1$.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \Pr[T_{ij} < \infty] = \sum_{k \in S} \Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} \Pr[T_{kj} < \infty] \cdot p_{ik} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}. \end{aligned}$$



Wegen der Gedächtnislosigkeit folgt $\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] = 1 + \mathbb{E}[T_{kj}]$ für $k \neq j$. Ferner gilt $\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = j] = 1$.

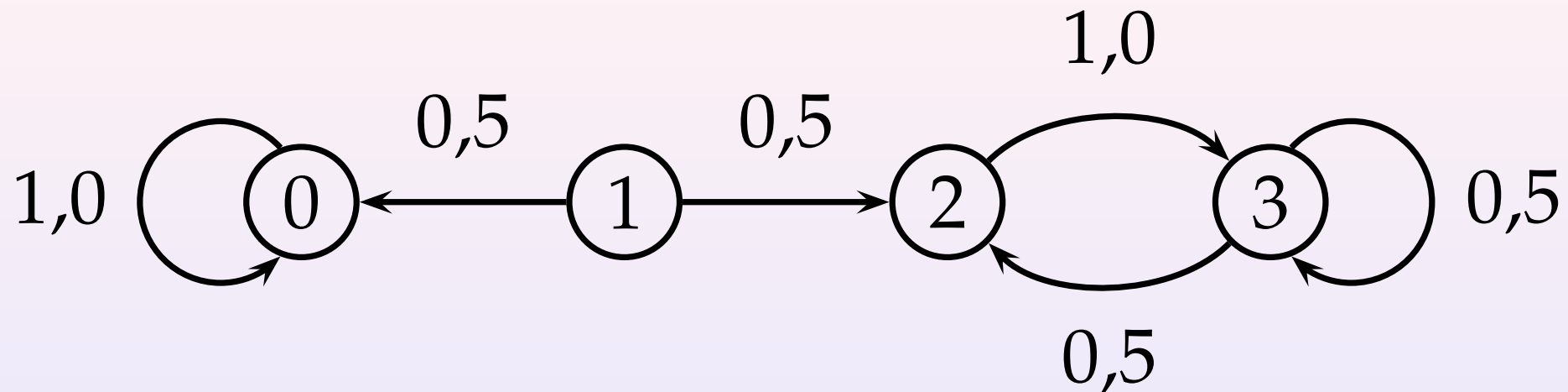
Bedingen wir wieder auf das Ergebnis des ersten Schritts, so folgt (siehe Satz 10):

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \mathbb{E}[T_{ij}] = \sum_{k \in S} \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + \mathbb{E}[T_{kj}]) \cdot p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \cdot p_{ik}. \end{aligned}$$

q. e. d.



Beispiel:



Für die Berechnung der Übergangszeiten für die Zustände **2** und **3** erhalten wir die Gleichungen

$$h_{22} = 1 + h_{32}, \quad h_{33} = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{23}$$

und

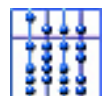
$$h_{23} = 1, \quad h_{32} = 1 + \frac{1}{2} h_{32}.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhalten wir die Werte $h_{22} = 3$, $h_{33} = 1,5$, $h_{23} = 1$ und $h_{32} = 2$. Die Ankunfts wahrscheinlichkeiten lassen sich analog herleiten.

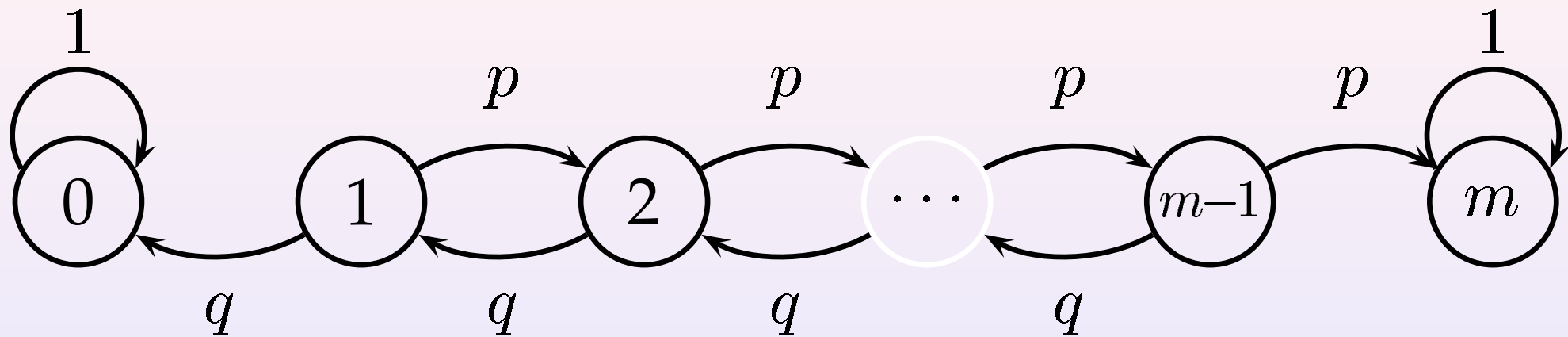
Man erhält $f_{22} = f_{33} = f_{23} = f_{32} = 1$.

Das Gamblers Ruin Problem

Anna und Bodo spielen Poker, bis einer von ihnen bankrott ist. A verfügt über Kapital a , und B setzt eine Geldmenge in Höhe von $m - a$ aufs Spiel. Insgesamt sind also m Geldeinheiten am Spiel beteiligt. In jeder Pokerrunde setzen A und B jeweils eine Geldeinheit. A gewinnt jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit p . B trägt folglich mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ den Sieg davon. Wir nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeiten vom bisherigen Spielverlauf und insbesondere vom Kapitalstand der Spieler unabhängig sind.



Wir modellieren das Spiel durch die Markov-Kette



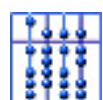
A interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, mit der sie B in den Ruin treibt, also für die Wahrscheinlichkeit $f_{a,m}$ (wir schreiben hier der Deutlichkeit halber $f_{i,j}$ statt f_{ij}).

Wir erhalten:

$$f_{i,m} = p \cdot f_{i+1,m} + q \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m - 1, \quad (4.2.4.1)$$

$$f_{m-1,m} = p + q \cdot f_{m-2,m},$$

$$f_{0,m} = 0.$$



Wir wollen nun $f_{i,m}$ allgemein als Funktion von m berechnen.

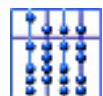
Dazu beobachten wir zunächst, dass wir (4.2.4.1) wegen $f_{m,m} = 1$ umschreiben können zu

$$f_{i+1,m} = (1/p) \cdot f_{i,m} - (q/p) \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m. \quad (4.2.4.2)$$

Wir ergänzen (4.2.4.2) um die Anfangswerte

$$f_{0,m} = 0 \text{ und } f_{1,m} = \xi.$$

(Für den Moment fassen wir ξ als Variable auf. Nach Lösung der Rekursion werden wir ξ so wählen, dass die Bedingung $f_{m,m} = 1$ erfüllt ist.)



Als Lösung dieser linearen homogenen Rekursionsgleichung

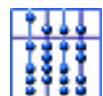
2. Grades (4.2.4.2) ergibt sich für $p \neq 1/2$:

$$f_{i,m} = \frac{p \cdot \xi}{2p - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i \right).$$

Setzen wir nun $i = m$, so folgt aus $f_{m,m} = 1$, dass

$$\xi = \frac{2p - 1}{p \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^m \right)}$$

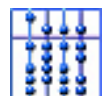
gelten muss.



Insgesamt erhalten wir somit das Ergebnis:

$$f_{j,m} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}.$$

Für $p = 1/2$ verläuft die Rechnung ähnlich.



Beispiel: Wir wollen berechnen, wie lange A und B im Mittel spielen können, bis einer von ihnen bankrott geht.

$h_{a,m}$ eignet sich dazu i.a. nicht (warum?).

Wir betrachten stattdessen:

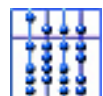
$T'_i :=$ „Anzahl der Schritte von Zustand i nach
Zustand 0 oder m “

und setzen

$$d_i := \mathbb{E}[T'_i].$$

Offensichtlich gilt $d_0 = d_m = 0$ und für $1 \leq i < m$

$$d_i = qd_{i-1} + pd_{i+1} + 1.$$



Wir betrachten nun nur den Fall $p = q = 1/2$ und erhalten

$$d_i = i \cdot (m - i) \text{ für alle } i = 0, \dots, m.$$

Wegen $d_i \leq mi \leq m^2$ folgt also, dass das Spiel unabhängig vom Startzustand im Mittel nach höchstens m^2 Schritten beendet ist.

