

**SS 2004**

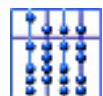
# **Diskrete Strukturen II**

**Ernst W. Mayr**

**Fakultät für Informatik**

**TU München**

<http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de>



## Lemma 26:

Für  $0 \leq \delta < 1$  gilt

$$(1 - \delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta+\delta^2/2} \quad \text{und} \quad (1 + \delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta+\delta^2/3}.$$

Beweis: Wir betrachten

$$f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) \quad \text{und} \quad g(x) = -x + \frac{1}{2}x^2.$$

Es gilt für  $0 \leq x < 1$ :

$$g'(x) = x - 1 \leq -\ln(1 - x) - 1 = f'(x)$$

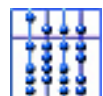
sowie

$$f(0) = 0 = g(0),$$

also im angegebenen Intervall  $f(x) \geq g(x)$ .

Die Ableitung der zweiten Ungleichung erfolgt analog.

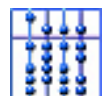
*q. e. d.*



## Korollar 27:

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit  $\Pr[X_i = 1] = p_i$  und  $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$ . Dann gelten folgende Ungleichungen für  $X := \sum_{i=1}^n X_i$  und  $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ :

1.  $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$  für alle  $0 < \delta \leq 1$ ,
2.  $\Pr[X \leq (1 - \delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$  für alle  $0 < \delta \leq 1$ ,
3.  $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$  für alle  $0 < \delta \leq 1$ ,
4.  $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu}$  und
5.  $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$  für  $t \geq 2e\mu$ .



Beweis:

1. und 2. folgen direkt aus Satz 24 bzw. 25 und Lemma 26.

Aus 1. und 2. zusammen folgt 3.

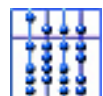
Die Abschätzung 4. erhalten wir direkt aus Satz 24, da für den Zähler gilt

$$e \leq e^{(1+\delta)}.$$

5. folgt aus 4., indem man  $t = (1 + \delta)\mu$  setzt,  $t \geq 2e\mu$ :

$$\left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu} \leq \left(\frac{e}{t/\mu}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

*q. e. d.*



**Beispiel:** Wir betrachten wieder balls into bins und werfen  $n$  Bälle unabhängig und gleichverteilt in  $n$  Körbe. Sei

$X_i :=$  Anzahl der Bälle im  $i$ -ten Korb

für  $i = 1, \dots, n$ , sowie  $X := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

Für die Analyse von  $X_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig)

verwenden wir Aussage 5 von Korollar 27, mit

$p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ ,  $\mu = 1$  und  $t = 2 \log n$ . Es folgt

$$\Pr[X_i \geq 2 \log n] \leq 1/n^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\Pr[X \geq 2 \log n] = \Pr[X_1 \geq 2 \log n \vee \dots \vee X_n \geq 2 \log n] \leq n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Es gilt also mit Wahrscheinlichkeit  $1 - 1/n$ , dass  $X < 2 \log n$  ist.



# 1.7 Erzeugende Funktionen

## 1.7.1 Einführung

### Definition:

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$  ist die (wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion definiert durch

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X].$$

Eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist also die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Folge  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  mit  $f_i := \Pr[X = i]$ .



Bei wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen haben wir kein Problem mit der Konvergenz, da für  $|s| < 1$  gilt

$$\begin{aligned} |G_X(s)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot |s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] = 1. \end{aligned}$$



## Beobachtung:

Sei  $Y := X + t$  mit  $t \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$G_Y(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \mathbb{E}[s^{X+t}] = \mathbb{E}[s^t \cdot s^X] = s^t \cdot \mathbb{E}[s^X] = s^t \cdot G_X(s).$$

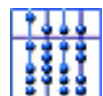
Ebenso lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] \cdot s^{k-1}, \text{ also}$$

$$G'_X(0) = \Pr[X = 1], \text{ sowie}$$

$$G_X^{(i)}(0) = \Pr[X = i] \cdot i!, \text{ also}$$

$$G_X^{(i)}(0)/i! = \Pr[X = i].$$

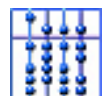




## Satz 28: (Eindeutigkeit der w.e. Funktion)

Die Dichte und die Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}$  sind durch ihre wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion eindeutig bestimmt.

Beweis: Folgt aus der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung.  
*q. e. d.*



# Bernoulli-Verteilung

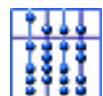
Sei  $X$  eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit  $\Pr[X = 0] = 1 - p$  und  $\Pr[X = 1] = p$ . Dann gilt

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = (1 - p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1 - p + ps.$$

## Gleichverteilung auf $\{0, \dots, n\}$

Sei  $X$  auf  $\{0, \dots, n\}$  gleichverteilt, d.h. für  $0 \leq k \leq n$  ist  $\Pr[X = k] = 1/(n + 1)$ . Dann gilt

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n + 1} \cdot s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{(n + 1)(s - 1)}.$$



# Binomialverteilung

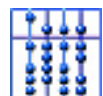
Für  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  gilt nach der binomischen Formel

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (1-p+ps)^n.$$

# Geometrische Verteilung

Sei  $X$  eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Dann gilt

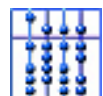
$$\begin{aligned} G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \cdot s^k \\ &= ps \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} = \frac{ps}{1-(1-p)s}. \end{aligned}$$



# Poisson-Verteilung

Für  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  gilt

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot s^k = e^{-\lambda + \lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$



## Beispiel:

Sei  $X$  binomialverteilt mit  $X \sim \text{Bin}(n, \lambda/n)$ , Für  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$G_X(s) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda s}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(s-1)}{n}\right)^n \rightarrow e^{\lambda(s-1)}.$$

Man kann beweisen, dass aus der Konvergenz der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion die Konvergenz der Verteilung folgt.



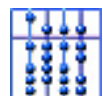
# Zusammenhang zwischen der w.e. Funktion und den Momenten

Da

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X],$$

gilt

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] = \mathbb{E}[X].$$



Beispiel:

Sei  $X$  binomialverteilt mit  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , also

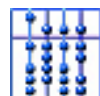
$$G_X(s) = (1 - p + ps)^n.$$

Dann gilt

$$G'_X(s) = n \cdot (1 - p + ps)^{n-1} \cdot p$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np.$$



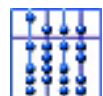
Ebenso ergibt sich

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1),$$

also etwa

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2.\end{aligned}$$

Andere Momente von  $X$  kann man auf ähnliche Art und Weise berechnen.





# Momentenerzeugende Funktionen

**Definition:** Zu einer Zufallsvariablen  $X$  ist die momentenerzeugende Funktion gemäß

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

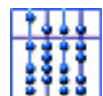
definiert.

Es gilt

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Xs)^i}{i!} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^i]}{i!} \cdot s^i$$

und

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}[(e^s)^X] = G_X(e^s).$$



## 1.7.2 Summen von Zufallsvariablen

### Satz 29: (Erzeugende Funktion einer Summe)

Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und die Zufallsvariable  $Z := X_1 + \dots + X_n$  gilt

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$

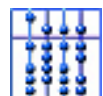
Ebenso gilt

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(s).$$

Beweis: Wegen der Unabhängigkeit von  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$G_Z(s) = \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_n}] = \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$

*q. e. d.*



**Beispiel:** Seien  $X_1, \dots, X_k$  mit  $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$  unabhängige Zufallsvariable und  $Z := X_1 + \dots + X_k$ . Dann gilt

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^k (1 - p + ps)^{n_i} = (1 - p + ps)^{\sum_{i=1}^k n_i}$$

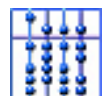
und somit  $Z \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$ .

(vgl. Satz 19)

Seien  $X_1, \dots, X_k \sim \text{Po}(\lambda)$  unabhängige Zufallsvariablen. Dann folgt für  $Z := X_1 + \dots + X_k$

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^k e^{\lambda(s-1)} = e^{k\lambda(s-1)}$$

und somit  $Z \sim \text{Po}(k\lambda)$ . (vgl. Satz 20)



# Zufällige Summen

Wir betrachten die Situation, dass  $Z := X_1 + \dots + X_N$ , wobei  $N$  ebenfalls eine Zufallsvariable ist.

## Satz 30:

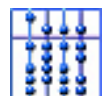
Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $G_X(s)$ .  $N$  sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $G_N(s)$ . Dann besitzt die Zufallsvariable  $Z := X_1 + \dots + X_N$  die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ .



Beweis: Nach Voraussetzung ist  $W_N \subseteq \mathbb{N}_0$ . Deshalb folgt mit Satz 10

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^Z \mid N = n] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n \cdot \Pr[N = n] \\ &= \mathbb{E}[(G_X(s))^N] \\ &= G_N(G_X(s)). \end{aligned}$$

*q. e. d.*



## 1.7.3 Rekurrente Ereignisse

Beispiel: Random Walk im  $d$ -dimensionalen Gitter  $\mathbb{Z}^d$

Wir betrachten ein Partikel, das sich zufällig auf den Punkten aus  $\mathbb{Z}$  bewegt. Es starte im Punkt  $0$  und bewege sich in jedem Zeitschritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  vom Punkt  $i$  zum Punkt  $i + 1$  („nach rechts“) bzw.  $i - 1$  („nach links“). Man nennt dieses Experiment auch Random Walk auf den ganzen Zahlen.

Abbildung 1.1 veranschaulicht diesen Prozess.

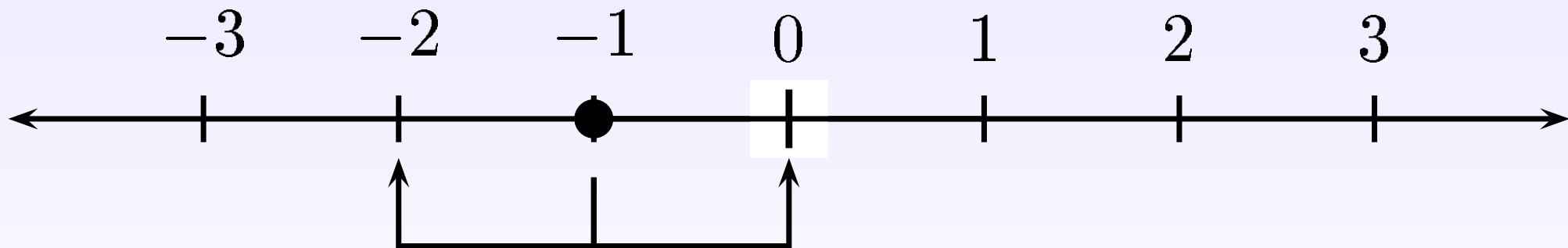


Abbildung 1.1: Random Walk auf den ganzen Zahlen

Für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $H_k$  das Ereignis  $H_k :=$  „Partikel befindet sich im  $k$ -ten Schritt im Punkt  $0$ “. Die Anzahl der Schritte nach rechts bzw. nach links bis zum  $k$ -ten Schritt ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = k$  und  $p = 1/2$ .

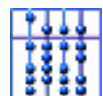
Für die Wahrscheinlichkeit  $h_k := \Pr[H_k]$  erhalten wir deshalb

$$h_k = \binom{k}{k/2} 2^{-k},$$

falls  $k$  gerade ist und  $h_k = 0$  sonst.

**Verallgemeinerung auf  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ :**

$$h_k = \left( \binom{k}{k/2} 2^{-k} \right)^d \text{ für } k \text{ gerade.}$$



Sei  $h'_k$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel im  $k$ -ten Schritt zum ersten Mal zum Punkt  $0^d$  zurückkehrt, und sei  $r := \sum_{k=1}^{\infty} h'_k$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel irgendwann zum Startpunkt zurückkehrt.

Wie hängt  $r$  von  $d$  ab?





Der gerade beschriebene Prozess hat die Eigenschaft, dass sich das Experiment nach jedem Besuch im Zustand  $0$  wieder genauso verhält wie beim Start des Prozesses im Zustand  $0$ . Mit solchen Ereignissen beschäftigt sich die Erneuerungstheorie (engl. renewal theory).

**Definition:** Die Ereignisse  $H_1, H_2, \dots$  heißen rekurrent, wenn für  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i > j$  gilt, dass

$$\Pr[H_i \mid \bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j] = \Pr[H_{i-j}].$$

Die Zufallsvariable  $Z$  mit  $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  messe die Wartezeit bis zum Auftreten des ersten Ereignisses  $H_k$ . Die Dichte von  $Z$  ist definiert durch

$$\Pr[Z = k] = \Pr[\bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k],$$

für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k]$ .

