Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dmytro Chibisov

SS 2005
Übungsblatt 7
1. Juni 2005

Algorithmische Algebra I

(Abgabe: Mittwoch, 8.6., in der Vorlesung)

Aufgabe 1
Sei G eine geordnete Liste von Polynomen in $k[X_1, ..., X_N]\backslash 0$. Für ein $f \in k[X_1, ..., X_n]$ sei $\bar{f}^G$ der Rest von f im Divisionsalgorithmus. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \mapsto \bar{f}^G$ k-linear ist, d.h. es gilt $\overline{cf}^G = c\bar{f}^G$ und $\overline{f+g}^G = \bar{f}^G + \bar{g}^G$ ($c \in k$, $f, g \in k[X_1, ..., X_n]$). (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3, Übungsblatt 5.)

Aufgabe 2
Für ein Ideal $I \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ definieren wir $B_I := \{M \in \mathbb{M}_n \,|\, M \notin (\mathrm{LT}(I))\}$. Zeigen Sie $B_I = \mathbb{M}_n \setminus \mathrm{LM}(I)$.

Aufgabe 3
Beweisen Sie, dass jedes Ideal J, das ein nulldimensionales Ideal I enthält, selbst nulldimensional sein muss.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\tau : k[X_1, ..., X_n]/I \longrightarrow k[X_1, ..., X_n]/J$ ($f/I \mapsto f/J$) surjektiv ist und schließen Sie daraus $\dim_k(k[X_1, ..., X_n]/J) \leq \dim_k(k[X_1, ..., X_n]/I)$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie

$$\mathbb{Q}[x, y]/(y + x^2 - 1, xy - 2y^2 + 2y) \cong \mathbb{Q}^4$$

als $\mathbb{Q}$-Vektorräume.