

4. Graphen

-67-

4.1. Graphentheorie (Forts. von 2.4.1.)

4.1.1. Ungerichtete Graphen

- Definitionen: Sei $G = (V, E)$ [mit $E \subset \binom{V}{2}$] ein ungerichteter Graph, und seien $v, w \in V$ zwei Knoten und
- v, w heißen "adjazent" g.d.w. sie durch eine Kante verbunden sind, d.h. wenn $\{v, w\} \in E$.
 - v und e heißen "inzident" g.d.w. v einer der Endknoten von e ist, d.h. wenn $v \in e$.
 - e und e' heißen "adjazent" g.d.w. e und e' einen (o. beide) Endknoten gemeinsam haben, d.h. wenn $|e \cap e'| \geq 1$.
 - Eine Kante der Form $\{v, v\} = \{v\}$ heißt "Schleife".

- Lemma: Die maximale Zahl von Kanten in einem ungerichteten Graphen
- | | | |
|--|-----|---|
| $\left\{ \begin{array}{l} \text{ohne Schleifen} \\ \text{mit Schleifen} \end{array} \right.$ | ist | $\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2} \end{array} \right.$ |
|--|-----|---|

- Beweis: HA

$$((b.) \quad \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n)$$

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $v \in V$.

Dann ist $N(v) := \{w \in V : \{v, w\} \in E\}$ die Menge der "Nachbarn" von v , und

$d(v) := |N(v)|$ ist der "Grad" von v

$$\delta(G) := \min \{d(w) : w \in V\}$$

$$\Delta(G) := \max \{d(w) : w \in V\}$$

- Lemma: Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis: $\sum_{v \in V} d(v)$ zählt jede Kante $e \in E$ genau zweimal, q.e.d.

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein "Pfad (V_m)" ist eine (geordnete) Folge von Knoten $p = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ mit $v_0, \dots, v_n \in V$; $n \in \mathbb{N}_0$, wobei gelten muss: $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \in E$.

- v_0 und v_n sind die "Endknoten" des Pfades p .
- Der Pfad p heißt "einfach", wenn jeder Knoten ^{des Pfades} nur genau einmal vorkommt, d.h. wenn $|\{v_0, \dots, v_n\}| = n+1$.
- Der Pfad p heißt "Kreis", wenn $v_0 = v_n$.
- Ein Kreis p heißt "einfacher Kreis", wenn er von der Länge ≥ 3 ist und außer $v_0 = v_n$ jeder Knoten nur einmal vorkommt, d.h. $|\{v_1, \dots, v_{n-1}\}| = n$.

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt "Teilgraph" von G , falls $V' \subset V$ und $E' \subset \binom{V'}{2} \cap E$.
- Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ heißt "induzierter Teilgraph" von G , falls alle Kanten in G , die Knoten aus V' verbinden, auch in G' vorhanden sind, d.h.: $E' = \binom{V'}{2} \cap E$. Man schreibt $G[V'] = G'$. (G' ist dann der "maximale Teilgraph" von G mit Knotenmenge V' .)

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Dann heißt G "zusammenhängend", wenn zwischen allen Paaren (v, v') von Knoten ein Pfad in G verläuft.
- Eine "Zusammenhangskomponente" ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G .

- B: Wegen der Maximalität von Zusammenhangskomponenten kann jeder Knoten nur in genau einer ZHK liegen. Diese induzieren also eine Partition von V . (\rightarrow Äquivalenzrelation)

- Definition: • Ein ungerichteter Graph heißt $\begin{cases} \text{"zyklisch"} \\ \text{"acyklisch"} \end{cases}$, wenn er $\begin{cases} \text{einen} \\ \text{Knoten} \end{cases}$ Kreis enthält.
- Ein acyklischer, zusammenhängender, ungerichteter Graph ist ein "ungerichteter Baum".
- Ein acyklischer, ungerichteter Graph ist also eine Menge von Bäumen, d.h. ein "Wald". (Jede ZHK ist ein Baum).

4.1.2. Gerichtete Graphen

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, d.h. $E \subset V \times V$.
- Für eine Kante $e = (v, w) \in E$ heißt v "Anfangsknoten" von e und w "Endknoten" von e .
- Dann heißt v "dir. Vorgänger" von w und w "dir. Nachfolger" von v .
- Die Knoten v, w heißen dann "adjacent".
- Es heißen v, e sowie w, e "incident".

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $v \in V$.
- Die Nachbarschaft von v ist wie folgt definiert:
 - $N^+(v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}$; Menge der dir. Nachfolger
 - $N^-(v) = \{w \in V : (w, v) \in E\}$; " " " " Vorgänger
 - $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$

- Es gilt:
 - $d^+(v) := |N^+(v)|$ der "Ausgangsgrad" von v
 - $d^-(v) := |N^-(v)|$ der "Eingangsgrad" von v
 - $d(v) := d^+(v) + d^-(v)$ der "Grad" von v .

- B: Da $|N^+(v) \cup N^-(v)| \leq |N^+(v)| + |N^-(v)|$, gilt: (Bsp.: $v \rightleftarrows w$)
 $d(v) \geq |N(v)|$.

- Definition: $S^+(G) := \min \{d^+(v) : v \in V\}$ | $S(G) := \min \{d(v) : v \in V\}$
- $\Lambda^+(G) := \max \{d^+(v) : v \in V\}$ | $\Delta(G) := \max \{d(v) : v \in V\}$

- Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Dann gilt:

$$|E| = \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v).$$

- Bew: HA

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein "gerichteter Pfad / Weg" in G ist eine geordnete Folge von Knoten $p = (v_0, v_1, \dots, v_n)$

mit $v_0, \dots, v_n \in V$; $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$(v_0, v_1), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in E.$$

- Es ist v_0 der "Anfangsknoten" des Pfades p und v_n der "Endknoten".
- p heißt "einfacher Pfad" g.d.w. $|\{v_0, \dots, v_n\}| = n+1$.
- Der Pfad p heißt "gerichteter Kreis", falls $v_0 = v_n$.
- Ein gerichteter Kreis p heißt "einfach", außer $v_0 = v_n$ jeder Knoten nur einmal in p vorkommt, d.h. $|\{v_1, \dots, v_{n-1}\}| = n$.

- Definition: Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein gerichteter Graph

$G' = (V', E')$ heißt "Teilgraph" von G , wenn

$$\rightarrow V' \subset V$$

$$\rightarrow E' \subset E \cap (V' \times V')$$

- G' heißt "induzierter Teilgraph" (man schreibt $G' = G[V']$), wenn $E' = E \cap (V' \times V')$.

- Definition: Ein gerichteter Graph heißt "schwach zusammenhängend", falls

er als ungerichteter Graph [ersetze $e = (v, w)$ durch $e = \{v, w\}$] zusammenhängend ist.

- Er heißt "stark zusammenhängend", falls zu jedem Paar (v, w) ein gerichteter Pfad mit v als Anfangsknoten und w als Endknoten existiert.

- Definition: Eine $\begin{cases} \text{starke} \\ \text{schwache} \end{cases}$ Zusammenhangskomponente ist ein maximaler $\begin{cases} \text{stark} \\ \text{schwach} \end{cases}$ zusammenhängender Teilgraph.

- B: Auch in gerichteten Graphen induzieren die starken / schwachen Zusammenhangskomponenten eine Partition der Knotenmenge.

- Definition: Ein gerichteter Graph ist "acyklisch" (ein "DAG"), falls er keinen gerichteten Kreis enthält.

- Definition^(*): Ein "gerichteter Baum" ist ein DAG, der schwach zusammenhängend ist, und in dem jeder Knoten einen Eingangsgrad von ≤ 1 hat. Ohne schwachen Zusammenhang haben wir einen "gerichteten Wald".

- Lemma: Unter den Bedingungen der Definition^(*) existiert genau ein Knoten im Graphen mit Eingangsgrad 0. Dieser Knoten heißt "Wurzel" des Baums.

- Bew: Nächster Abschnitt.

- B: Diese Definition von Bäumen ist äquivalent zu der aus Abschnitt 2.4.1 (Heapsort).