WS 2003/04

Diskrete Strukturen I

Ernst W. Mayr

mayr@in.tum.de
Institut für Informatik
Technische Universität München

12-09-2003

Anzahl von Abbildungen (Forts.)

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$
\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\ \text{der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A| = k}} \#\ \text{der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \,.
\end{aligned}
$$

Anzahl von Abbildungen (Forts.)

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} .
\end{aligned}$$

Anzahl von Abbildungen (Forts.)

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$
\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \,.
\end{aligned}
$$

Anzahl von Abbildungen (Forts.)

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \,.
\end{aligned}$$

Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: *"balls into bins"*

	beliebig	*injektiv*	*surjektiv*	*bijektiv* $(n = r)$
N *unterscheidbar* R *unterscheidbar*	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N *nicht unterscheidbar* R *unterscheidbar*	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N *unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 *oder* 0	$S_{n,r}$	1
N *nicht unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 *oder* 0	$P_{n,r}$	1

Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: *"balls into bins"*

	beliebig	*injektiv*	*surjektiv*	*bijektiv* $(n = r)$
N *unterscheidbar* R *unterscheidbar*	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N *nicht unterscheidbar* R *unterscheidbar*	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N *unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 *oder* 0	$S_{n,r}$	1
N *nicht unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 *oder* 0	$P_{n,r}$	1

Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: *"balls into bins"*

	beliebig	*injektiv*	*surjektiv*	*bijektiv* ($n = r$)
N *unterscheidbar* R *unterscheidbar*	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N *nicht unterscheidbar* R *unterscheidbar*	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N *unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 *oder* 0	$S_{n,r}$	1
N *nicht unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 *oder* 0	$P_{n,r}$	1

Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: *"balls into bins"*

	beliebig	*injektiv*	*surjektiv*	*bijektiv* ($n = r$)
N *unterscheidbar* R *unterscheidbar*	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N *nicht unterscheidbar* R *unterscheidbar*	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N *unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 *oder* 0	$S_{n,r}$	1
N *nicht unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 *oder* 0	$P_{n,r}$	1

Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: *“balls into bins”*

	beliebig	*injektiv*	*surjektiv*	*bijektiv* ($n = r$)
N *unterscheidbar* R *unterscheidbar*	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N *nicht unterscheidbar* R *unterscheidbar*	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N *unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum\limits_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 *oder* 0	$S_{n,r}$	1
N *nicht unterscheidbar* R *nicht unterscheidbar*	$\sum\limits_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 *oder* 0	$P_{n,r}$	1

Definition

Die *Stirling-Zahl der ersten Art*

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ *mit genau* k *Zyklen an.*

Einfache Beobachtungen:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$$

Stirling-Zahlen erster Art

Definition

Die *Stirling-Zahl der ersten Art*

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ *mit genau* k *Zyklen an.*

Einfache Beobachtungen:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$$

2.
$$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3.
$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4.
$$s_{n,n} = 1$$

5.
$$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,\, k < 0.$$

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

2.
$$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3.
$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4.
$$s_{n,n} = 1$$

5.
$$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

Typ einer Permutation

Definition

Sei π eine Permutation von n Objekten, $b_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge i ($i = 1, \ldots, n$) und $b(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π, also

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i(\pi) = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \ldots n^{b_n(\pi)}$$

der *Typ von π (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).*

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1\ 8\ 3)}_{\textit{als Funktionswerte}}$$

$$= \underbrace{(1\ 4\ 2\ 5\ 7\ 8\ 3\ 6)}_{\textit{in Zyklenschreibweise}}$$

Typ: 8^1

Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 7\ 1\ 6\ 5\ 3\ 8)$$

$$= (1\ 2\ 4)\ (3\ 7)\ (5\ 6)\ (8)$$

Typ: $1^1\ 2^2\ 3^1$

Lemma

Es gibt

$$\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}$$

verschiedene Typen von Permutationen in S_n.

Beweis.

Klar. $\square$

Lemma

Es gibt

$$\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}$$

verschiedene Typen von Permutationen in S_n.

Beweis.

Klar. $\square$

Lemma

Es gibt

$$\frac{n!}{b_1!\cdot b_2!\cdot\ldots\cdot b_n!\cdot 1^{b_1}\cdot 2^{b_2}\cdot\ldots\cdot n^{b_n}}$$

verschiedene Permutationen in S_n *vom Typ* $1^{b_1}\cdot 2^{b_2}\cdot\ldots\cdot n^{b_n}$ *(Beachte:* $0! = 1$*). Insbesondere gilt:*

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{N}_0{}^n\\ \sum b_i=k\\ \sum i\cdot b_i=n}} \frac{n!}{b_1!\cdot b_2!\cdot\ldots\cdot b_n!\cdot 1^{b_1}\cdot 2^{b_2}\cdot\ldots\cdot n^{b_n}}$$

und

$$n! = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{N}_0{}^n\\ \sum_{i=1}^{n} i\cdot b_i=n}} \frac{n!}{b_1!\cdot b_2!\cdot\ldots\cdot b_n!\cdot 1^{b_1}\cdot 2^{b_2}\cdot\ldots\cdot n^{b_n}}.$$

Lemma

Es gibt

$$\frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

verschiedene Permutationen in S_n *vom Typ* $1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}$ *(Beachte:* $0! = 1$*). Insbesondere gilt:*

$$s_{n,k} = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{N}_0{}^n \\ \sum b_i = k \\ \sum i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}$$

und

$$n! = \sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{N}_0{}^n \\ \sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i = n}} \frac{n!}{b_1! \cdot b_2! \cdot \ldots \cdot b_n! \cdot 1^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \ldots \cdot n^{b_n}}.$$

Beweis.

Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\sqcup)(\sqcup)\dots(\sqcup)}^{b_1}\overbrace{(\sqcup\sqcup)(\sqcup\sqcup)\dots(\sqcup\sqcup)}^{b_2}\dots\overbrace{(\sqcup\sqcup\sqcup\dots\sqcup)}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten. Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor *überzählt* werden. $\square$

Beweis.

Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\textvisiblespace)(\textvisiblespace)\dots(\textvisiblespace)}^{b_1}\overbrace{(\textvisiblespace\textvisiblespace)(\textvisiblespace\textvisiblespace)\dots(\textvisiblespace\textvisiblespace)}^{b_2}\dots\overbrace{(\textvisiblespace\textvisiblespace\textvisiblespace\dots\textvisiblespace)}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten. Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor *überzählt* werden. $\square$

Beweis.

Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2} \dots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\text{\textvisiblespace})(\text{\textvisiblespace})\dots(\text{\textvisiblespace})}^{b_1}\overbrace{(\text{\textvisiblespace\textvisiblespace})(\text{\textvisiblespace\textvisiblespace})\dots(\text{\textvisiblespace\textvisiblespace})}^{b_2}\dots\overbrace{(\text{\textvisiblespace\textvisiblespace\textvisiblespace}\dots\text{\textvisiblespace})}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten. Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor *überzählt* werden. $\square$

Beweis.

Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2}\dots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\text{␣})(\text{␣})\dots(\text{␣})}^{b_1}\overbrace{(\text{␣␣})(\text{␣␣})\dots(\text{␣␣})}^{b_2}\dots\overbrace{(\text{␣␣␣}\dots\text{␣})}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten. Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i! \cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor *überzählt* werden. □

Beweis.

Sei Typ $1^{b_1}\ 2^{b_2}\ldots n^{b_n}$ gegeben:

$$\overbrace{(\textvisiblespace)(\textvisiblespace)\ldots(\textvisiblespace)}^{b_1}\overbrace{(\textvisiblespace\textvisiblespace)(\textvisiblespace\textvisiblespace)\ldots(\textvisiblespace\textvisiblespace)}^{b_2}\ldots\overbrace{(\textvisiblespace\textvisiblespace\textvisiblespace\ldots\textvisiblespace)}^{b_n(\leq 1)}$$

Insgesamt gibt es n freie Plätze. Ersetze die freien Plätze durch Permutationen aus S_n. Dafür gibt es $n!$ Möglichkeiten. Nun muss beachtet werden, dass

- die Zyklen der Länge i beliebig vertauschbar sind, und
- ein Zyklus der Länge i in sich i-mal zyklisch geshiftet werden kann, ohne die Permutation zu ändern.

Damit ergeben sich für die Zyklen der Länge i oben genau $b_i!\cdot i^{b_i}$ verschiedene Anordnungen, so dass insgesamt alle Permutationen mit dem angegebenen Faktor *überzählt* werden. □

Beispiel

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

Beispiel

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

Beispiel

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

Beispiel

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

Beispiel

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

Beispiel

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

Beispiel

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

Beispiel

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

Beispiel

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

Abzählkoeffizienten

Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1. $$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \qquad \forall n \geq k > 0$$
   $$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall n > 0$$

2. $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n \geq k > 0$$

3. $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \forall n \geq k > 0$$

Abzählkoeffizienten

Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1.
$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \qquad \forall n \geq k > 0$$
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall n > 0$$

2.
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n \geq k > 0$$

3.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \forall n \geq k > 0$$

Abzählkoeffizienten

Binomialkoeffizienten

Wir hatten bereits:

1.
$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \qquad \forall n \geq k > 0$$
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall n > 0$$

2.
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n \geq k > 0$$

3.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \forall n \geq k > 0$$

Weiter definiert man:

1. $$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{C}$$

2. $$\binom{0}{0} := 1$$

3. $$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1) \qquad \forall x \in \mathbb{C},\ k \geq 0 \end{aligned}$$

4. $$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter definiert man:

1.
$$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{C}$$

2.
$$\binom{0}{0} := 1$$

3.
$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1) \qquad \forall x \in \mathbb{C},\ k \geq 0 \end{aligned}$$

4.
$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter definiert man:

1. $$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{C}$$

2. $$\binom{0}{0} := 1$$

3. $$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1) \qquad \forall x \in \mathbb{C},\ k \geq 0 \end{aligned}$$

4. $$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter definiert man:

1. $$n^{\underline{0}} := n^{\overline{0}} := 0! := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{C}$$

2. $$\binom{0}{0} := 1$$

3. $$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1) \\ x^{\overline{k}} &= x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+k-1) \qquad \forall x \in \mathbb{C},\ k \geq 0 \end{aligned}$$

4. $$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma

$\binom{x}{k}$ ist, für $k \geq 0$, ein Polynom in x vom Grad k, und es gilt auch für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{C}$

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

Beweis

Da für $k \leq 0$ per Definition der Binomialkoeffizienten Gleichheit gilt, betrachten wir nur $k > 0$. Es ist dann

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}$$

ein Polynom in x vom Grad $\leq k$. Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist dieses Polynom gleich 0. Ein Polynom einer Variablen mit unendlich vielen Nullstellen ist aber sicher identisch 0 (`Fundamentalsatz der Algebra`).

Lemma

$\binom{x}{k}$ ist, für $k \geq 0$, ein Polynom in x vom Grad k, und es gilt auch für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{C}$

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

Beweis

Da für $k \leq 0$ per Definition der Binomialkoeffizienten Gleichheit gilt, betrachten wir nur $k > 0$. Es ist dann

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}$$

ein Polynom in x vom Grad $\leq k$. Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist dieses Polynom gleich 0. Ein Polynom einer Variablen mit unendlich vielen Nullstellen ist aber sicher identisch 0 (`Fundamentalsatz der Algebra`).

Eine weitere Möglichkeit, den Beweis zu führen:

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} = (k + x - k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-1)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

q. e. d.

Eine weitere Möglichkeit, den Beweis zu führen:

$$\begin{aligned} x^{\underline{k}} &= x \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} = (k + x - k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-k)(x-1)^{\underline{k-1}} \\ &= k \cdot (x-1)^{\underline{k-1}} + (x-1)^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

q. e. d.