

2.2 Morphismen

Seien $A = \langle S, \Phi \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$ zwei Algebren mit derselben Signatur.

2.2.1 Isomorphismus

Definition: Eine Abbildung

$$h: S \rightarrow \tilde{S}$$

heißt ein **Isomorphismus** von A nach \tilde{A} , falls

- ▶ h bijektiv ist und

2.2 Morphismen

Seien $A = \langle S, \Phi \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$ zwei Algebren mit derselben Signatur.

2.2.1 Isomorphismus

Definition: Eine Abbildung

$$h: S \rightarrow \tilde{S}$$

heißt ein **Isomorphismus** von A nach \tilde{A} , falls

- ▶ h bijektiv ist und
- ▶ h mit den in Φ und $\tilde{\Phi}$ einander entsprechenden Operatoren vertauschbar ist:

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\circ} & S \\ \downarrow (h, \dots, h) & & \downarrow h \\ \tilde{S}^m & \xrightarrow{\tilde{\circ}} & \tilde{S} \end{array}$$

h ist also ein Isomorphismus gdw

- ▶ $h(c) = \tilde{c}$ für alle nullstelligen Operatoren (Konstanten) c

h ist also ein Isomorphismus gdw

- ▶ $h(c) = \tilde{c}$ für alle nullstelligen Operatoren (Konstanten) c
- ▶ $h(u(x)) = \tilde{u}(h(x))$ für alle unären Operatoren $u \in \Phi, \forall x \in S$

h ist also ein Isomorphismus gdw

- ▶ $h(c) = \tilde{c}$ für alle nullstelligen Operatoren (Konstanten) c
- ▶ $h(u(x)) = \tilde{u}(h(x))$ für alle unären Operatoren $u \in \Phi, \forall x \in S$
- ▶ $h(b(x, y)) = \tilde{b}(h(x), h(y))$ für alle binären Operatoren $b \in \Phi, \forall x, y \in S$

h ist also ein Isomorphismus gdw

- ▶ $h(c) = \tilde{c}$ für alle nullstelligen Operatoren (Konstanten) c
- ▶ $h(u(x)) = \tilde{u}(h(x))$ für alle unären Operatoren $u \in \Phi, \forall x \in S$
- ▶ $h(b(x, y)) = \tilde{b}(h(x), h(y))$ für alle binären Operatoren $b \in \Phi, \forall x, y \in S$

Notation: $A \cong \tilde{A}$: „ A isomorph zu \tilde{A} “, d. h. es existiert ein Isomorphismus von A nach \tilde{A} (und von \tilde{A} nach A).

Ein Isomorphismus von A nach A heißt **Automorphismus**.

Beispiel:

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\langle 2 \cdot \mathbb{N}_0, + \rangle$ ($2 \cdot \mathbb{N}_0$: gerade Zahlen) mit

$$h: \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto 2 \cdot n \in \mathbb{N}_0$$

ist ein Isomorphismus zwischen den beiden Algebren.

Beispiel:

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\langle 2 \cdot \mathbb{N}_0, + \rangle$ ($2 \cdot \mathbb{N}_0$: gerade Zahlen) mit

$$h: \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto 2 \cdot n \in \mathbb{N}_0$$

ist ein Isomorphismus zwischen den beiden Algebren.

Beispiel:

$\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$)

$$h: \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \log x \in \mathbb{R}$$

ist ein Isomorphismus (der sog. Rechenschieberisomorphismus)

Satz 3: Ein Algebra-Isomorphismus bildet Einselemente auf Einselemente, Nullelemente auf Nullelemente und Inverse auf Inverse ab.

Satz 3: Ein Algebra-Isomorphismus bildet Einselemente auf Einselemente, Nullelemente auf Nullelemente und Inverse auf Inverse ab.

Beweis: Sei die Abbildung $h : S \rightarrow \tilde{S}$ ein Isomorphismus von $A = \langle S, \Phi \rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$.

Sei 1 ein rechtes Einselement für den Operator $\circ \in \Phi$ in A .
Dann gilt für alle $\tilde{b} \in \tilde{S}$:

$$\tilde{b} \circ h(1) = h(b) \circ h(1) = h(b \circ 1) = h(b) = \tilde{b}$$

Also ist $h(1)$ ein rechtes Einselement in \tilde{A} . Die Argumentation für linke Einselemente, Nullelemente und Inverse ist analog.
q. e. d.

2.2.2 Homomorphismus

Definition: Eine Abbildung

$$h: S \rightarrow \tilde{S}$$

heißt ein **Homomorphismus** von A nach \tilde{A} , falls h mit den in Φ und $\tilde{\Phi}$ einander entsprechenden Operatoren vertauschbar ist.

Beispiel:

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \mathbb{Z}_m, +_{(m)} \rangle$ mit $+_{(m)}$ als Addition modulo m .

$$h: \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto n \bmod m \in \mathbb{Z}_m$$

ist ein (surjektiver) Homomorphismus.

Beispiel:

$\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ und $\tilde{A} = \langle \mathbb{Z}_m, +_{(m)} \rangle$ mit $+_{(m)}$ als Addition modulo m .

$$h: \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto n \bmod m \in \mathbb{Z}_m$$

ist ein (surjektiver) Homomorphismus.

Beispiel:

$\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ und $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$ mit Σ^* Menge der endlichen Zeichenreihen über dem Alphabet Σ .

$$h: \Sigma^* \ni \sigma \mapsto |\sigma| \in \mathbb{N}_0$$

mit $|\sigma|$ der Länge der Zeichenreihe ist ein Homomorphismus.

Satz 4: Sei h ein Homomorphismus von $A = \langle S, \Phi \rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$, mit $\tilde{\Phi} = h(\Phi)$. Dann ist $\langle h(S), \tilde{\Phi} \rangle$ eine Unteralgebra von \tilde{A} .

Satz 4: Sei h ein Homomorphismus von $A = \langle S, \Phi \rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$, mit $\tilde{\Phi} = h(\Phi)$. Dann ist $\langle h(S), \tilde{\Phi} \rangle$ eine Unteralgebra von \tilde{A} .

Beweis: Offensichtlich.

q. e. d.