

# Diskrete Strukturen II

## Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

04.06.2004



# Raumänderung

Die **Zentralübung** findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801



# Hinweise zur Zwischenklausur

- Termin: Samstag, 05.06.2004
- Beginn: 9:00 Uhr
- Dauer: 2 Stunden (120 Minuten)
- Ort: MW 0001 und MW 2001  
(Gebäude der Fakultät Maschinenwesen)
- Hilfsmittel: 1 beidseitig handbeschriebenes A4-Blatt
- Wertung: 50% der Gesamtnote



# Aufgabe 1

Die hungrige Wüstenmonsterspinne benötigt sehr viele Kalorien! Daher muss sie innerhalb der nächsten 10 Stunden 500 Fliegen fangen. Genau 100 Fliegen passieren ihr Nest pro Stunde, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils  $1/6$  gefangen. Die anderen 40 sind groß und bleiben mit Wahrscheinlichkeit  $3/4$  im Netz hängen.

- a) Wie hätten Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt, dass die Spinne nicht verhungert?

Sei  $X$  die Anzahl der gefangenen Fliegen. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X) = 600 \cdot 1/6 + 400 \cdot 3/4 = 400$$

$$\text{Var}(X) = 600 \cdot 1/6 \cdot 5/6 + 400 \cdot 3/4 \cdot 1/4 = 1900/12 \approx 158$$



# Aufgabe 1

$$\text{a) } \mathbb{E}(X) = 400 \quad \text{Var}(X) = 1900/12$$

Nach **Markov** ist dann

$$\Pr[X \geq 500] \leq 400/500 = 0.8$$

Nach **Chebyshev** gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 500] &= \Pr[X - 400 \geq 100] \\ &\leq \Pr[|X - 400| \geq 100] \leq \frac{1900/12}{100^2} \approx 0.016 \end{aligned}$$

Nach **Chernoff** gilt

$$\Pr[X \geq 500] = \Pr[X \geq (1 + \frac{1}{4}) \cdot 400] \leq \left( \frac{e^{1/4}}{5/4^{5/4}} \right)^{400} \approx 0.0000094$$

Die Spinne würde also verhungern, wenn sie sich auf Markov verlassen würde!



# Aufgabe 1

- b) Welche der Ungleichungen von Aufgabe a) sind gültig, wenn wir wissen, dass die Spinne lediglich *erwarten* kann, 10 kleine und 30 große Fliegen pro Stunde zu fangen, aber keine weiteren Informationen besitzt?
- **Markov** gilt weiterhin, da die Ungleichung nur vom Erwartungswert und der Nichtnegativität der Zufallsvariable abhängt.
  - Für **Chebyshev** fehlt uns die Varianz.
  - Für **Chernoff** müssten wir wissen, dass die Anzahl der Fliegen eine Summe unabhängiger Bernoulli-Variablen ist (was wir nicht wissen).

# Aufgabe 2

Wir starten mit einem Euro Kapital und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze:

- Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze.
- Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz.
- Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich  $\frac{4}{3}$  des Einsatzes als Gewinn.



# Aufgabe 2

a) Welchen Gewinn erwarten wir?

Sei  $X_n$  unser Kapital in der  $n$ -ten Runde.

Sei  $Y_n = 1/2$ , wenn im  $n$ -ten Wurf Kopf fällt und

$Y_n = 1 + 4/3 \cdot 1/2 = 5/3$ , wenn im  $n$ -ten Wurf Zahl fällt.

Dann ist  $X_n = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_n$ .

Aus

$$\mathbb{E}(Y_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{13}{12}$$

folgt unmittelbar

$$\mathbb{E}(X_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k) \rightarrow \infty.$$

Also erwarten wir einen unendlich großen Gewinn!





# Aufgabe 2

- b) Was passiert mit unserem Kapital wenn wir sehr lange spielen?  
(Hinweis: Verwenden Sie das Gesetz der großen Zahlen.)

Sei  $\mu := \mathbb{E}(\ln Y_i)$ . Dann ist  $\mu = ((\ln 1/2 + \ln 5/3) \cdot \frac{1}{2}) < 0$ .

Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt mit  $\varepsilon = \left| \frac{\mu}{2} \right| = -\frac{\mu}{2}$

$$\Pr \left[ \left| \frac{\ln Y_1 + \ln Y_2 + \dots + \ln Y_n}{n} - \mu \right| \leq \left| \frac{\mu}{2} \right| \right] \rightarrow 1$$

woraus unmittelbar

$$\Pr \left[ \frac{\ln X_n}{n} - \mu \leq -\frac{\mu}{2} \right] \rightarrow 1$$

folgt. Für großes  $n$  also geht die Wahrscheinlichkeit gegen 1, dass  $X_n \leq e^{\mu n/2}$ . Wegen  $\mu < 0$  strebt also unser Kapitalstand mit immer größerer Wahrscheinlichkeit gegen 0, je länger wir spielen.



## Aufgabe 2

- c) Interpretieren Sie die Ergebnisse! Sollte man das Spiel spielen oder nicht?

Es handelt sich um ein Spiel, das zwar vorteilhaft ist, weil man mit einer sehr *geringen* Wahrscheinlichkeit einen *extrem großen* Gewinn erzielen kann. Aber auf Dauer verliert man, so dass man lieber "sicheren" Beschäftigungen (wie Black Jack, Roulette, Poker ;o) nachgehen sollte.



# Aufgabe 3

Wir haben in der Vorlesung festgestellt, dass die Poisson-Verteilung ein Grenzwert der Bernoulli-Verteilung ist. Beweisen Sie, dass die in der Vorlesung vorgestellte Chernoff-Schranke (wie wir intuitiv vermuten können) auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.



## Aufgabe 3

Sei  $X$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda = \mu$ .

Dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}^+$ , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tX}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} e^{tk} = e^{\mu(e^t-1)} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu e^t} (\mu e^t)^k}{k!}}_{=1 \text{ da Poisson-vert. Wahrsch.}} \\ &= e^{\mu(e^t-1)} \end{aligned}$$

Nach der Markov-Ungleichung gilt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}} = e^{\mu(e^t-1)-t(1+\delta)\mu}$$

Mit  $t := \ln(1 + \delta)$  erhalten wir hieraus

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq e^{\mu\delta - (\ln(1+\delta))(1+\delta)\mu} = \left( \frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}} \right)^\mu$$



# Aufgabe 4

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

Da wir das Papier immer treffen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt der Münze höchstens  $x$  cm von einer Linie entfernt ist (wobei  $0 \leq x \leq 2$ ), gleich  $\frac{1}{2}x$ .  
Also berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  eine Linie.



# Aufgabe 4

- b) Wir werfen nun eine 2cm lange Nadel anstatt der Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt diese die Linie?

Wir nehmen an, dass Winkel und Ort der Nadel unabhängig sind.

Sei der Abstand des Mittelpunkts der Nadel zu seiner nächsten Linie gleichverteilt auf  $[0, 2\text{cm}]$ .

Sei ferner  $\Theta$  der kleinste Winkel zwischen der Linie und der Nadel. Dann ist  $\Theta$  gleichverteilt auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Wenn  $y$  die Distanz zwischen Mittelpunkt der Nadel und der nächsten Linie ist, dann schneidet sie die Linie genau dann, wenn

$$y \leq \frac{2 \text{ (cm)}}{2} \sin \Theta$$

# Aufgabe 4

- b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel die Linie schneidet, ist also

$$\frac{\int_0^{\pi/2} 1 \text{ cm} \cdot \sin \Theta \, d\Theta}{\int_0^{2 \text{ cm}} \int_0^{\pi/2} 1 \, d\Theta \, dy} = \frac{1 \text{ cm}}{\pi \text{ cm}} = \frac{1}{\pi}$$

# Raumänderung

Die **Zentralübung** findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 18.06.2004: MW 1801
- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

