

---

## Diskrete Strukturen II

---

### Aufgabe 1

Gegeben zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Zeigen Sie:

- Wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig sind sowie den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz haben, so gilt  $\mathbb{E}((X - Y)^2) = 2\text{Var}(X)$ .
- Wenn  $X$  und  $Y$  die gleiche Varianz haben, so gilt  $\mathbb{E}((X + Y)(X - Y)) = \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(X - Y)$ .
- Es gilt  $\text{Var}(X + Y) + \text{Var}(X - Y) = 2\text{Var}(X) + 2\text{Var}(Y)$ .

### Aufgabe 2

Wir wählen nacheinander zufällig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes CHOOSE aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen:

- $X :=$  Anzahl der Züge (mit Zurücklegen), bis C gezogen.
- $Y :=$  Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis C gezogen.
- $Z :=$  Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen), bis beide O gezogen.

### Aufgabe 3

Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit  $10^{-4}$  ein von einer Quelle  $Q$  emittiertes Teilchen. Wenn  $Q$  30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

### Aufgabe 4

Es wird so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen  $1, \dots, 6$  einmal gekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariable  $X$  durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Wie groß sind  $\mathbb{E}(X)$  und  $\text{Var}(X)$ ?

### Aufgabe 5

Heureka! Wir haben eine Maschine erfunden, die DS-II Hausaufgaben automatisch löst, und werden sie gleich morgen in Betrieb nehmen. Aufgrund der Komplexität der Aufgaben ist die Maschine allerdings recht fehleranfällig und geht mit Wahrscheinlichkeit  $\Pr[t] = C/t^4$  in genau  $t$  Tagen von heute an kaputt.

- Wie groß ist  $C$ ?
- Welche Lebensdauer erwarten Sie für die Maschine? (Hinweis: Sie dürfen  $\zeta(3) \approx 1.2021$  annehmen, wobei  $\zeta$  die Riemannsche Zetafunktion  $\zeta(\sigma) = \sum_{n \geq 1} n^{-\sigma}$  sei.)
- Welche Varianz hat die erwartete Lebensdauer?
- In 10 Tagen stellen wir fest, dass die Maschine immer noch läuft. Wie lange erwarten wir nun, dass es dauert, bis sie kaputt geht?