

---

## Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

---

Abgabetermin: 14.11.2003 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen gelten (mit Begründung)?

1.  $n^2 \log n = O(n^3)$
2.  $\log^3 n = \Omega(n)$
3.  $n^2 + 10^{100}n = \Theta(n^2)$
4.  $n^2 + 2n = \frac{1}{2}n^2 + o(n^2)$

### Aufgabe 2

In einem fiktiven Land mit  $n$  Städten gibt es nur Einbahnstraßen. Jede Stadt ist mit jeder durch eine Straße verbunden. Für zwei beliebige Städte  $a, b$  gilt, dass man entweder von  $a$  nach  $b$  oder von  $b$  nach  $a$  kommen kann, aber nicht beides. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Stadt  $z$  gibt, die immer über höchstens einen Zwischenstopp erreicht werden kann. Für eine beliebige Stadt  $a$  gilt also, dass man entweder von  $a$  nach  $z$  kommt, oder es gibt eine Stadt  $b$  und man kommt von  $a$  nach  $b$  nach  $z$ .

### Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz:

Seien  $a \geq 1, b > 1$  und  $k \in \mathbb{N}$  konstant,  $f(n)$  eine Funktion und  $T(n)$  definiert durch die Rekursionsgleichung  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ ,  $n = b^k$ . Dann ist

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{falls } f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \text{ für ein konstantes } \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n), & \text{falls } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}), \\ \Theta(f(n)), & \text{falls } f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \text{ für ein konstantes } \epsilon > 0 \\ & \text{und } af(n/b) \leq cf(n) \text{ für ein konstantes } c < 1. \end{cases}$$

### Aufgabe 4

Geben Sie eine geschlossene Form für die folgenden Summen an (mit Beweis).

1.  $\sum_{k=0}^n k2^k$
2.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$
3.  $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m}$
4.  $\left( \sum_{k=0}^n k \right)^2 = \sum_{k=0}^n k^3$