
Algorithmische Algebra II

Abgabe: 5. Mai, in der Übung, MI03.09.011B

Aufgabe 1

Sei M ein R -Modul und N, U, V R -Untermoduln von M . Zeigen Sie:

- (a) $(U + V)/V \cong U/(U \cap V)$.
- (b) M noethersch $\iff M/N$ und N noethersch. Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).

Aufgabe 2

Sei $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Zeigen Sie:

- (a) Sind $h_1, \dots, h_s \in R$, so ist $\text{syz}(h_1, \dots, h_s)$ ein R -Untermodul von R^s .
- (b) Sei $F = [f_1, \dots, f_s]$ mit $f_i = c_i M_i \neq 0$, $c_i \in k$, $M_i \in \mathbb{M}(X_1, \dots, X_n)$. Nach Satz 6.3.6 der Vorlesung ist jedes Element von $S(F) := \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s))$ eindeutig darstellbar als Summe von homogenen Syzygien, d.h. $S(F) = \bigoplus_{\alpha} S(F)_{\alpha}$. Beweisen Sie die Eindeutigkeit.

Aufgabe 3

Seien $f_1, \dots, f_q \in R \setminus 0$, $R = k[X_1, \dots, X_n]$, gegeben. Sei $\Phi : R^q \rightarrow R^q$ die Abbildung definiert durch (vgl. Vorlesung) $\Phi(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$ und, für $\bar{h} = (h_1, \dots, h_q) \neq (0, \dots, 0)$, durch $\Phi(\bar{h}) = (h'_1, \dots, h'_q)$ mit

$$h'_i = \begin{cases} \text{LT}(h_i), & \text{falls } \text{multideg}(h_i f_i) = \delta(\bar{h}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\delta(\bar{h}) = \max\{\text{multideg}(h_i f_i) : h_i f_i \neq 0\}$. Ist $\bar{s} = (s_1, \dots, s_q) \in \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$ eine homogene Syzygie vom Grad δ und $\bar{h} = (h_1, \dots, h_q) \in R^q$ mit $\sum_i s_i f_i = \sum_i h_i f_i$ und $\delta(\bar{h}) < \delta$, so gilt $\Phi(\bar{s} - \bar{h}) = \Phi(\bar{s}) = \bar{s}$.

Aufgabe 4

Seien $f_1, \dots, f_q \in R \setminus 0$, $R = k[X_1, \dots, X_n]$, gegeben und sei $\mathcal{F} = [f_1, \dots, f_q]$.

- (a) Sei $\bar{s} = (s_1, \dots, s_q) \in \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$ homogen vom Grad δ . Ist dann $\bar{s} \cdot \mathcal{F} := \sum_i s_i f_i \neq 0$, so gilt $\text{multideg}(\bar{s} \cdot \mathcal{F}) < \delta$.
- (b) Sei $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_t$ ein Erzeugendensystem von $\text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$, wobei \bar{s}_i homogen vom Grad γ_i ist. Ist dann $\bar{s} \in \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$ homogen vom Grad δ , so existieren $d_i \in k$ mit

$$\bar{s} = \sum_i d_i X^{\delta - \gamma_i} \bar{s}_i.$$

- (c) Beweisen Sie Theorem 6.3.11 der Vorlesung unter Benutzung von (a) und (b).